*

Egenskaper

Del II

(Bevis for teoremer)

*

Morten Rognes

1987

*

§0 Innledning

Det følgende arbeid er et supplement til "Egenskaper Del I". Hovedformålet med dette skrift er å gi bevis for de teoremer som ble oppført i "Egenskaper Del I" og som ikke ble bevist i detalj der fordi bevisene ville gjøre fremstillingen for lang og overlesset, og dessuten bidra til å distrahere leseren slik at oppmerksomheten ble trukket vekk fra de vesentlige trekk ved de egenskapsteoriene som ble fremstilt.

Her vil vi følgelig ta for oss de tekniske detaljene i det nevnte arbeid. En forutsetning for lesningen av dette supplement er at leseren er fortrolig med "Egenskaper Del I" og også kjenner til Rognes [1] og Rognes [2]. Vi gjør også oppmerksom på at når vi i det følgende skal gi bevis for de satser som er oppført i Del I vil vi følge nummereringen av teoremene slik den er gitt i det arbeidet. Denne nummereringen vil derfor ikke bli endret. Imidlertid vil enkelte nye setninger som ikke er nevnt tidligere bli tatt med. Disse vil da bli nummerert på en slik måte at sammenhengen med teoremene i Del I skulle være klar. Denne sammenheng vil også bli klargjort ved ytterligere kommentarer. Det første emnet som tas opp her er alternative aksiomatiseringer av E;1.

§1 Alternative aksiomatiseringer av teorien E;1

I Del I ble det antydet to alternative aksiomatiseringer av teorien E;1. De ble detaljert beskrevet i §0 - §5. I denne paragrafen vil den første av disse aksiomatiseringene, nemlig den som ble beskrevet i §6, avsnitt A, bli studert. Denne aksiomatiseringen ble betegnet med E;1'. Denne teorien fremkommer fra E;1 ved å fjerne predikatene "U(x)" og "True(w,x)" fra språket til E;1, og ved å erstatte "N- {ø}" overalt i aksiomene A1 - A11 med "N". Predikatene "U(x)" og "True(w,x)" ble så innført som definerte predikater ved de følgende to definisjoner:

D1 $U(x) \leftrightarrow At;0(x)$

D2 $True(w,x) \leftrightarrow (At;0(x) \,\&\, w \hat{e} I \,\&\, H(D,x,w))$

I denne forbindelse bemerkes det at "D;0" defineres ved D;0 = {D} og at uttrykket "D;n" forøvrig er definert på vanlig måte for $n \geq 1$.

Erstatter man "N-{ø}" overalt i A1 – A11 med "N" fås følgende aksiomer som her skrives opp i detalj, og som vi velger å kalle A1' – A11':

A1' $At;n(x) \rightarrow x \hat{e} N$

A2' $H(x,y,w) \rightarrow (MV(w) \,\&\, (En)(n \hat{e} N \,\&\, At;n(y)))$

A3' $H(x,y,w) \rightarrow (At;n(y) \rightarrow x \hat{e} D;n))$

A4' $n \hat{e} N \rightarrow (Ey)(M(y) \,\&\, y = Mg(x: At;n(x)))$

A5' $(Ey)(M(y) \,\&\, y = Mg(x: MI(x)))$

A6' $Cd(D) \geq Aleph;0$

A7' $At;n(y;1) \,\&\, At;n(y;2) \,\&\, n \hat{e} N \,\&$
$(Aw)(w \hat{e} I \rightarrow Mg(x: H(x,y;1,w)) = Mg(x: H(x,y;2,w)) \rightarrow y;1 = y;2$

A8' $At;n(x) \rightarrow (Ey)(At;n(y) \,\&$
$(Az)(Aw)(\, z \hat{e} D;n \,\&\, w \hat{e} I \rightarrow (H(z,y,w) \leftrightarrow \neg H(z,x,w))))$

A9' $M(a) \,\&\, (Ax)(x \hat{e} a \rightarrow At;n(x)) \,\&n \hat{e} N \rightarrow (Ey)(At;n(y) \,\&$

(Aw)(Az)((wêI & zêD;n) –> (H(z,y,w) <–> (Ax)(xêa –> H(z,x,w)))))

A10' M(x) & x Inkl D;n & nêN & wêI –> (Ey)(At;n(y) & Ekst;w(y) =x)

A11' w;1,w;2êI & w;1≠w;2 & M(x) & x Inkl D;n & nêN: –>
(Ey)(Ez)(At;n(y) & At;n(z) & Ekst;(w;1)(y) = Ekst;(w;1)(z) =x &
Ekst;(w;2)(y)Ω Ekst;(w;2)(z)=ø)

Dette gir en fullstendig oversikt over hvordan aksiomene A1 – A12 blir om de endres slik som nevnt. Språket til E;1' er nå L;e[Δ] minus predikatene "U(x)" og "True(w,x)". De ikke-logiske aksiomene er ZFCu-aksiomene i dette snevrere språket, A1' - A11', samt U1. De aksiomene som er sløyfet er U2, U3 og U4. mao. de tre utsagnsteoretiske aksiomene. Disse har nå blitt erstattet med konvensjonen D;0={D} samt definisjonene D1 og D2 som ble nevnt ovenfor.

Det som nå vil bli gjort er det følgende: Først vil det bli bevist at alle teoremene i E;1 kan utledes i E;1' om man definerer predikatene "At*;n(x)" og "H*(x,y,w)" på den følgende måte:

D1* At*;n(x) <–> (At;n(x)& nêN &n≥1)

D2* H*(x,y,w) <–> (H(x,y,w) &(En)(At;n(x)& nêN &n≥1))

og ellers bruker definisjonene D1 og D2 ovenfor.

Dernest vil det bli vist at man i E;1 kan utlede A1' – A11', samt A0' nedenfor, om predikatene "At';n(x)" og "H'(x,y,w)" defineres på følgende måte:

D1' At';n(x) <–> [(nê(N - {ø}) & At;n(x)) v (n=ø & U(x))]

D2' H'(x,y,w) <–> [(En)(nê(N - {ø}) & At;n(y) & wêI & H(x,y,w)) v
(U(y) & x=D &wêI & True(w,y))]

og E;1 dessuten utvides med den følgende formel som et nytt ikke-logisk aksiom:

A0 U(x) –> ¬(En)(n≥1 & At;n(x))

Denne utvidelsen av E;1 betegnes med E;1[A0]. Det vil også bli vist hvordan E;1[A0] kan intepreteres inn i E;1' utvidet med lukningen av den følgende formel som nytt ikke-logisk aksiom:

A0' At;0(x) –> ¬(En)(n≥1 & At;n(x))

Det følgende teorem sier at de utsagnsteoretiske aksiomene U2, U3 og U4 er teoremer i teorien E;1':

Teorem 0. 1 Setningene U2, U3 og U4 er teoremer i teorien E;1'.

Bevis: Det vil først bli bevist at (1) U2ê Th(E;1'). Anta for vilkårlige x, y at (2) U(x) & U(y) og dessuten at (3) (Aw)(MV(w) –> (True(w,x) <–> True(w,y)). Det som ønskes bevist er at x=y. Nå har man i lys av A7' at det følgende gjelder:

(4) At;0(x) & At;0(y) & (Aw)(wêI –> (Az)(H(z,x,w) <–> H(z,y,w))) –> x=y

Fra (2) og definisjonen av U følger: (5) At;0(x) & At;0(y). Anta nå for vilkårlig w og vilkårlig z at (6) wêI & H(z,x,w). Da har man (7) MV(w) i kraft av definisjoen av "I". Fra A3' følger (8) H(z,x,w) & At;0(x) –> zêD;0. Herav følger ved hjelp av definisjonen av D;0 at (9) H(z,x,w) &At;0(x) –> z=D. Fra (5), (6) og (9) følger så: (10) H(D,x,w) & At;0(x) & wêI. Det følger også at (11) z=D. Fra (10) og definisjonen D2, som ble betraktet ovenfor, følger (12) True(w,x). Fra (3), (7) og (12) følger så (13) True(w,y). Men dette, D2 og (11) impliserer H(z,y,w). Vi har nå vist, siden z og w var vilkårlige entiteter at:

(14) (Aw)(Az)((wêI & H(z,x,w)) –> H(z,y,w))

På akkurat den samme måten kan man vise at:

(15) (Aw)(Az)((wêI & H(z,y,w)) –> H(z,x,w))

Fra dette, (14), (4) og (5) følger imidlertid x=y. Dette viser klart at U2 lar seg utlede i E;1'.

Det som dernest må bevises er at U3 er et teorem i E;1, dvs. at U3êTh(E;1'). Dette innebærer at man må bevise:

True(w,x) –> (MV(w) & U(x))

Dette følger imidlertid direkte fra definisjonene av "True(w,x)" og "U(x)", dvs. fra D1 og D2.

Det siste som må bevises er at U4êTh(E;1'). For å vise dette er det tilstrekkelig i lys av Teorem 18 i Rognes "En teori om presise deskriptive utsagn" å vise at eksistensaksiomet for utsagn, U7, negasjonsaksiomet for utsagn, U8, det uendelige konjunksjonsaksiomet for utsagn, U9, og separabilitetsaksiomet for utsagn, U11, kan utledes i E1'. Man har i så fall at alle aksiomene i T;1"" (Se §5.2 i "En teori om presise deskriptive utsagn") kan utledes i E;1' og i lys av Teorem 18 følger da at U4 også er utledbar.

Først er det derfor påkrevet å vise at U7êTh(E;1'). Dette innebærer at man må vise at den følgende formel er et teorem i E;1':

(Aw)(wêI –> (Ex)(U(x) & True(w,x)))

Anta for vilkårlig w at (1) wêI. Fra A10' følger det om man setter n=0 at:

(2) M(x) & x Inkl D;0 & wêI –> (Ey)(At;0(y) & Ekst;w(y)=x)

Herav følger, sidem M({D}) & {D} Inkl D;0 at (Ey)(At;0(y) & Ekst;w(y) ={D}). Ved hjelp av definisjonene av "U", dvs. D1, og "Ekst" følger herav:

(3) (Ey)(U(y) & Mg(z: H(z,y,w))={D})

Mao. må det finnes en eller annen entitet y der man har:

(4) U(y) & (Az)(H(z,y,w) <–> z=D). Herav følger U(y) & H(D,y,w). Men nå har vi wêI & At;0(y). Det følger derfor i lys av D2 at U(y) & True(w,y). Herav har man så (Ey)(U(y) & True(w,y)). Dette viser at U7 er utledbar i E;1'.

Det må dernest vises at U8 er et teorem i E;1'. Det som må bevises i E;1' er følgelig at:

(Ax)(U(x) –> (Ey)(U(y) & (Aw)(MV(w) –> (True(w,y) <–> ¬True(w,x))))

Anta følgelig for vilkårlig x at (1) U(x). Da følger ved hjelp av D1 at (2) At;0(x). Fra dette og A8' følger så i sin tur, om vi i A8' setter n=0, at:

(3) (Ey)(At;0(y) & (Az)(Aw)((wêI & zêD;0) –> (H(z,y,w) <–> ¬H(z,x,w))))

Dette innebærer åpenbart at det finnes y slik at:

(4) At;0(y) & (Az)(Aw)((wêI & zêD;0) –> (H(z,y,w) <–> ¬H(z,x,w)))

Anta for vilkårlig w at (5) wêI , mao. at MV(w). Fra dette og (4) følger da, ettersom DêD;0 at (6) H(D,y,w) <–> ¬H(D,x,w). Har man nå True(w,y) følger ved hjelp av D2 at H(D,y,w) og i så fall kan man ved (6) slutte at ¬H(D,x,w). Men i lys av D2 kan det da ikke være slik at True(w,x). Dette innebærer at ¬True(w.x). Anta på den annen side at ¬True(w,y). Siden At;0(x) & wêI følger da ved hjelp av D2 at ¬H(D,x,w). Dette og (6) gir H(D,y,w). Det følger derfor at True(w,y). Vi har nå vist True(w,y) <–> ¬(True(w,x)). Men w var et vilkårlig element i I. Derfor kan man konkludere med at:

(Aw)(wêI –> (True(w,y) <–> ¬True(w,x))). Siden U(y) følger så det man ønsker nemlig: (Ey)(U(y) & (Aw)(MV(w) –> (True(w,y) <–> ¬True(w,x)))

La oss dernest vise at U9 kan utledes i E;1'. Man må følgelig vise at den følgende formel er et teorem i E;1':

M(a) &(Ax)(xêa –> U(x)) –> (Ey)(U(y) &
(Aw)(MV(w) –> (True(w,y) <–> (Ax)(xêa –> True(w,x)))))

Anta derfor at (1) M(a) & (Ax)(xêa –> U(x)). Fra (1) og A9' følger, om man i A9' setter n=0 og husker at (Ax)(At;0(x) <–> U(x)), at det finnes y der :

(2) U(y) & (Aw)(Az)(wêI & zêD;0 –>
(H(z,y,w) <–> (Ax)(xêa –> H(z,x,w))))

Anta for vilkårlig w at (3) wêI, dvs. MV(w). Da følger ved hjelp av (2), siden DêD;0= {D} at (4) H(D,y,w) <–> (Ax)(xêa –> H(D,x,w)). Antar man nå at True(w,y) følger umiddelbart ved hjelp av D2 at H(D,y,w), og derfor i lys av (4) at
(5) (Ax)(xêa –> H(D,x,w)). Anta for vilkårlig x at (6) xêa. Fra (6) og (1) følger U(x), og dette, det at wêI og (5), impliserer da i lys av D1 og D2 at True(w,x). Anta på den annen side at (Ax)(xêa –> True(w,x)). Da har man åpenbart i lys av D2 at (Ax)(xêa –> H(D,y,w)). Ved hjelp av (4) kan man da slutte H(D,y,w). Dette, D2 gir en så True(w,y). Det følger at man må ha:

(Aw)(wêI –> (True(w,y) <–> (Ax)(xêa –> True(w,x))))

Dette og den første konjunkten i (2) impliserer så det man ønsker.

Tilslutt må det vises at separabilitetsaksiomet for utsagn, U11, kan utledes i E;1'. Separabilitetsaksiomet er den følgende formel:

U11 (w;1,w;2êI & w;1≠w;2) –> (Ex)(Ey)(U(x) & U(y) & True(w;1,x) &
True(w;2,y) & ¬(Ew)(wêI & True(w,x) & True(w,y)))

På dette punkt er det først hensiktsmessig å bevise at den følgende formel kan utledes i E;1':

(+) (w;1,w;2êI & w;1≠w;2) –> (Ez)(U(z) & True(w;1,z) & ¬True(w;2,z))

Man ser lett at U11 impliserer denne formelen og at (+) sammen med negasjonsaksiomet for utsagn (som det nå har blitt bevist at lar seg utlede i E;1') impliserer U11. Det vil følgelig være tilstrekkelig å vise at (+) kan utledes i E;1'.

Anta derfor at (1) w;1,w;2êI & w;1≠w;2 for vilkårlige entiteter w;1 og w;2. Setter man n=0 i A11' og husker at DêD;0={D} og at M({D}) følger ved hjelp av (1) at det finnes y,z der:

(2) At;0(y) & At;0(z) & Ekst;(w;1)(y) = Ekst;(w;1)(z) = {D} &
Ekst;(w;2)ΩEkst;(w;2)(z)=ø

Nå har man at (Ay)(At;0(y) <–> U(y)) og at Ekst;w(z) = Mg(r: H(r,z,w)) for alle w og z. Fra disse to ting og (2) følger:

(3) U(y) & U(z) & H(D,y,w;1) & H(D,z,w;1) & ¬(Er)(H(r,y,w;2) & H(r,z,w;2))

Siden w;1,w;2êI & At;0(y) & At;0(z) følger fra (3) i lys av D2:

(4) U(y) & U(z) & True(w;1,y) & True(w;1,z). Fra (3) følger ¬(H(D,y,w;2) & H(D,z,w;2)). Man har derfor: (¬H(D,y,w;2)) v (¬H(D,z,w;2)). I det første tilfellet følger ¬True(w;2,y) siden det gjelder at At;0(y) & w;2êI. I dette tilfelle følger derfor det man ønsker, nemlig

(Ey)(U(y) & True(w;1,y) &¬True(w;2,y)

I det andre tilfelle har man likeledes at ¬True(w;2,z) siden At;0(z) & w;2êI. Ved hjelp av (4) følger også i dette tilfelle det man ønsker, nemlig:

(Ez)(U(z) & True(w;1,z) & ¬True(w;2,z))

I begge tilfelle holder altså satsen. Dette avslutter dermed beviset for (+).

Tilslutt er det påkrevet for klarhetens skyld å vise hvordan U11 følger ved hjelp av (+) og U8 - negasjonsaksiomet for utsagn:

Anta (1) w;1,w;2êI & w;1≠w;2. Fra (+) følger da eksistensen av z der man har: (2) U(z) & True(w;1,z) & ¬True(w;2,z). Fra den første konjunkten i (2) og U8 følger så eksistensen av y der:

(3) U(y) & (Aw)(MV(w) –> (True(w,y) <–> ¬True(w,z)))

Siden w;2êI følger fra (2) og (3) at (4) True(w;2,y). Anta det finnes w der man har at True(w,z) & True(w,y) & wêI. Da følger at True(w,y) <–> ¬True(w,z) ved hjelp av (3) og derfor True(w,z) &¬True(w,z) som er umulig. Det følger derfor at det ikke kan finnes noen slik w, mao. har man:

(5) ¬(Ew)(wêI & True(w,z) & True(w,y))

Men fra (2), (3), (4) og (5) følger konsekventen i U11. Dette avslutter beviset for Teorem 0.1. **QED.**

Det som har blitt vist ovenfor er at aksiomene U2 - U4 kan utledes i E;1' når "True(w,x)" og "U(x)" defineres ved hjelp av definisjonene D1 og D2. Men aksiomene A1 – A11 har vi ikke vist at er teoremer i E;1'. Dette lar seg heller ikke gjøre. Det er bare hvis de primitive predikatene "At;n(x)" og "H(z,x,w)" i disse aksiomene intepreteres på den måten som er angitt ved D1* og D2* at disse aksiomene kan utledes i E;1'. La oss betegne språket til E;1' med L+ akkurat i denne paragrafen. L;e[Δ] er språket til teorien E;1. Det som da kan gjøres – noe som ble antydet ovenfor – er at det er mulig å definere en "naturlig" intepretasjon av L;e[Δ] inn i L+ som avbilder alle teoremene i E;1 på teoremer i E;1'. Det vil nå bli vist hvordan dette skal gjøres. Først innføres den følgende definisjon.

Definisjon: La ß være den intepretasjonen av L;e[Δ] inn i L+ som er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene og som dessuten oppfyller de følgende krav:

(a) ß(MV(x)) = MV(x)
(b) ß(MI(x)) = MI(x)
(c) ß(At;n(x)) = (At;n(x) & nê(N-{ø}))
(d) ß(H(x,y,w)) = (H(x,y,w) &(En)(At;n(x) & nê(N-{ø}))
(e) ß(U(x)) = At;0(x)
(f) ß(True(w,x)) = (At;0(x) & wêI & H(D,x,w))

Gitt denne definisjonen kan man gi bevis for det følgende teorem:

Teorem 0.1.1 Anta F er en formel i L;e[Δ], dvs. at FêFm(L;e[Δ]). Da har man at hvis F er et teorem i E;1 så er ß(F) et teorem i E;1'. I symboler kan dette uttrykkes slik:

(AF)(FêFm(L;e[Δ]) & FêTh(E;1) –> ß(F)êTh(E;1')

Bevis: Setningen bevises ved induksjon på mengden av teoremer i E;1. Nå skulle det være klart at ß overfører alle de rent logiske og mengdeteoretiske aksiomene i E;1 på teoremer i E;1', siden avbildningen ß er forutsatt å være normal med hensyn på de rent logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene i L. Det skulle også være klart i denne forbindelse at ß avbilder en instans av replacementaksiomet og utsondringsaksiomet i L;e[Δ] på en tilsvarende instans i L+. Videre skulle det være klart at hvis ß(F;1–>F;2) og ß(F,1) er teoremer i E;1' så er også ß(F;2) og ß(AxF;1) det. Det vil derfor være tilstrekkelig å vise at ß(Aj)êTh(E;1') for

j=1 – 11 og at ß avbilder de utsagnsteoretiske aksiomene U1 – U4 på teoremer i E;1'. Dette siste har blitt bevist i og med at det har blitt levert et fullstendig bevis for Teorem 0.1.

(i) Man har at ß(A1) = ß(At;n(x) –> nê(N-{0})) =

At;n(x) & nê(N-{0}) –> nê(N-{0}).

At dette er et teorem i E;1' skulle være opplagt.

(ii) I lys av definisjonen av ß har man:

ß(A2) = ß(H(x,y,w) –> MV(w) &(En)(nê(N-{0}) & At;n(y))) =

H(x,y,w) & (En)(At;n(y) & nê(N-{0}) –>

MV(w) & (En)(nê(N-{0}) & At;n(y))

Den siste formelen ser man umiddelbart må være et teorem i E;1' i kraft av aksiomet A2'. Man har derfor ß(A2)êTh(E;1).

(iii) Når det gjelder A3 skulle det være klart at:

ß(A3)= ß(H(x,y,w) & At;n(y) –> xêD;n) =

H(x,y,w)& (En)(At;n(y) & nê(N-{0})) &

At;n(y) &nê(N-{0}) –> xêD;n

Her følger den siste formelen umiddelbart i kraft av A3'.

(iv) Man har at ß(A4) = ß(nê(N-{0}) –> (Ey)(M(y) & y= Mg(x: At;n(x))) =

nê(N-{0}) –> (Ey)(M(y) & y= Mg(x: At;n(x) & nê(N-{0})))

Anta nê(N-{0}). Da har man åpenbart at nêN. Ifølge A4' følger i så fall: M(y) & y=Mg(x: At;n(x)) for noe y. Siden nê(N-{0}) har man :

Mg(x: At;n(x)) = Mg(x: At;n(x) & nê(N-{0})). Det følger fra dette at M(y) & y= Mg(x: At;n(x) & nê(N-{0})). Følgelig må man ha :

(Ey)(M(y) & y= Mg(x: At;n(x) & nê(N-{0}))). Dette viser at satsen holder i dette tilfellet.

(v) Når det gjelder A5 gjelder ß((Ey)(M(y) & y=Mg(x: MI(x)))) = A5'. Satsen holder derfor.

(vi) Siden ß er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene har man åpenbart at ß(Cd(D)≥ Aleph;0) = A6'. Dette viser at ß(A6)êTh(E;1').

(vii) I forbindelse med A7 har man:

(1) ß(At;n(y;1) & At;n(y;2) nê(N-{0}) &

(Aw)(wêI –> Mg(x: H(x,y;1,w)) = Mg(x: H(x,y;2,w))) –> y;1=y;2) =

At;n(y;1) & At;n(y;2) nê(N-{0}) & Aw)(wêI –>

Mg(x: H(x,y;1,w) &(En)(nê(N-{0}) & At;n(y;1))) =

Mg(x: H(x,y;2,w))& (En)(nê(N-{0}) & At;n(y;2))) –>

y;1=y;2

Anta antesedenten i ß(A7), dvs. (1), holder. I lys av A7' er det tilstrekkelig å vise at (Aw)(wêI –> Mg(x: H(x,y;1,w)) = Mg(x: H(x,y;2,w)). Anta derfor wêI og H(x,y;1,w) for vilkårlige objekter x og w. Da har man :

wêI & H(x,y;1,w) &(En)(nê(N-{0}) & At;n(y;1))

i lys av de tre første konjunktene i antesedenten i ß(A7). Da følger H(x,y;2,w) ved hjelp av den fjerde konjunkten i ß(A7). Man ser også lett at :

(Aw)(wêI –> (Ax)(H(x,y;2,w) –> H(x,y;1,w))). Det følger at man har: (Aw)(wêI –> (Ax)(H(x,y;2,w) <–> H(x,y;1,w))) og derfor at:

(Aw)(wêI –> Mg(x: H(x,y;1,w)) = Mg(x: H(x,y;2,w))

Ved hjelp av A7' følger så at y;1=y;2 som er det man ønsker.

(viii) Når det gjelder A8 har man at dette er den følgende formel:

(+) At;n(x) –> (Ey)(At;n(y) & (Az)(Aw)(zêD^n &wêI –>

(H(z,y,w) <–> ¬H(z,x,w))))

Anvendes ß på denne formelen får man at ß(A8) er ekvivalent med den følgende formel:

(++) At;n(x) & nê(N-{ø}) –> (Ey)(At;n(y) & nê(N-{ø}) &
(Az)(Aw)(zêD^n &wêI –> (H(z,y,w)&(En)(At;n(y) & nê(N-{ø}))
<–> ¬(H(z,x,w)&(En)(At;n(x) & nê(N-{ø}))))))

Vi skal vise at (++) er et teorem i E;1'. Anta at (1) At;n(x) & nê(N-{ø}). Da følger ved hjelp av A8' at det må finnes y der

(2) At;n(y) & (Az)(Aw)(zêD^n &wêI –>(H(z,y,w) <–> ¬H(z,x,w)))

Fra den siste konjunkten i (1) og den første konjunkten i (2) følger det at
(3) At;n(y) & nê(N-{ø}). Anta nå for vilkårlige z og w at (4) zêD^n & wêI.
(a) Anta H(z,y,w)&(En)(At;n(y) & nê(N-{ø})). Da følger ved hjelp av (2) at ¬H(z,x,w)) og derfor at ¬(H(z,x,w)&(En)(At;n(x) & nê(N-{ø}))) (b) Anta på den annen side at ¬(H(z,x,w)&(En)(At;n(x) & nê(N-{ø}))). Fra (1) følger at
(En)(At;n(x) & nê(N-{ø})). Dette innebærer ¬(H(z,x,w)). Fra dette, (2) og (4) følger så H(z,y,w). Sammen med (3) impliserer dette:

(H(z,y,w)&(En)(At;n(y) & nê(N-{ø})

Dermed er det blitt bevist at (++) holder og dermed at ß(A8) êTh(E;1').

(ix) Anvender man transformasjonen ß på A9 får man en formel som er ekvivalent med den følgende:

(1) (M(a) & (Ax)(xêa –> (At;n(x) &nê(N-{0}))) & nê(N-{ø}) –>
(Ey)(At;n(y) &nê(N-{ø}) & (Aw)(Az)((wêI & zêD^n)–>
(H(z,y,w) &(En)(At;n(y) & nê(N-{ø})<–>
(Ax)(xêa –> (H(z,x,w)&(En)(At;n(y) & nê(N-{ø}))))))

Antar man at antesedenten i (1) holder har man i lys av A9' at det finnes y der der :

(2) At;n(y) & (Aw)(Az)((wêI & zêD;n) –>
(H(z,y,w) <–> (Ax)(xêa –> H(z,x,w))))

Oppgaven er derfor å vise at konsekventen i (1) holder. Anta derfor at wêI & zêD^n for vilkårlige entiteter z og w. Fra (2) følger da:

(3) (H(z,y,w) <–> (Ax)(xêa –> H(z,x,w)))

(a) Anta H(z,x,y) & (En)(At;n(y) & nê(N-{ø}). Ved hjelp av (3) følger i så fall:
(Ax)(xêa –> H(z,x,w)). Men fra dette og antesedenten i (1) har man:

(4) (Ax)(xêa –> (H(z,x,w)&(En)(At;n(y) & nê(N-{ø}))))

som er det man ønsker. (b) Anta på den annen side at (4) holder. Da har man åpenbart at (Ax)(xêa –> H(z,x,w)). Dette og (3) impliserer H(z,y,w). Men man har At;n(y) & nê(N-{0}). Da følger H(z,y,w) & (En)(At;n(y) & nê(N-{0})). Dette viser at ß(A9) er et teorem i E;1'.

(x) ß(A10) er ekvivalent med den følgende formel:
(M(X) & X Inkl D^n & nê(N-{ø}) & wêI) –>
(Ey)(At;n(y) & nê(N-{0}) &
Mg(z: H(z,y,w) &(En)(At;n(y) & nê(N-{0}))) =X)

At dette er et teorem i E;1' er det imidlertid lett å vise ved hjelp av aksiomet A10'.

(xi) Også transformasjonen av A11 ved hjelp av ß, dvs. ß(A11), skulle det være forholdsvis lett å se at må være et teorem i E;1'. Det er en passe oppgave for leseren å sjekke dette.

Dermed har det blitt bevist at ß(Aj)êTh(E;1') for j=1 – 11. Dette avslutter beviset for Teorem 0.1.1. **QED**

Vi har nå vist at alle teoremene i E;1 kan utledes i E;1' om man definerer predikatene "At;n(x)" og "H(x,y,w)" som ved D1* og D2* og ellers bruker definisjonene D1 og D2. Det som nå vil bli gjort er å gi et bevis for at teorien E;1' utvidet med aksiomet A0' kan

intepreteres på en naturlig måte inn i teorien E;1 utvidet med aksiomet A0. Tidligere ble språkene L+ og L;e[Δ] definert. Det er nå formålstjenlig å definere en intepretasjonsfunksjon ∂ som avbilder Fm(L+) inn i Fm(L;e[Δ]). Som man husker går ß den andre veien. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon: La ∂ være den intepretasjonen av L+ inn i L;e[Δ] som er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene og som dessuten oppfyller de følgende krav:

(a) $\partial(MV(x)) = MV(x)$
(b) $\partial(MI(x)) = MI(x)$
(c) $\partial(At;n(x)) = (At;n(x) \& n\hat{e}(N-\{ø\})) \vee (n=0 \& U(x))$
(d) $\partial(H(x,y,w)) = (H(x,y,w) \& w\hat{e}I \& (En)(At;n(y) \& n\hat{e}(N-\{ø\})) \vee (U(y) \& x=D \& w\hat{e}I \& True(w,y))$

Dermed er intepretasjonsfunksjonen ∂ fullstendig definert. Det teoremet som det vil bli gitt et bevis for kan så formuleres slik:

Teorem 0.2 Anta F er en formel i L+, dvs. at $F\hat{e}Fm(L+)$. Da har man at hvis F er et teorem i E;1'[A0'] så er ß(F) et teorem i E;1[A0]. I symboler kan dette uttrykkes slik:
$(AF)(F\hat{e}Fm(L+) \& F\hat{e}Th(E;1'[A0']) \rightarrow ß(F)\hat{e}Th(E;1[A0])$

Denne setningen sier altså – som man ser – at funksjonen ∂ avbilder alle teoremene i førsteordens teorien E;1' utvidet med aksiomet A0' på teoremer i teorien E;1 utvidet med aksiomet A0.

Før vi går videre bør det understrekes at det ikke har blitt bevist at E;1' kan intepreteres inn i E;1. Dette følger ikke fra teoremet ovenfor. Det eneste som følger fra Teorem 0.2 i denne retning er at E;1' kan intepreteres inn i E;1 utvidet med A0. Hvorvidt E;1' kan tolkes inn i E;1 – og ikke bare inn i den mengdeteoretiske del av E;1 – er så langt et åpent spørsmål.

Bevis: Setningen bevises ved induksjon på teoremene i E;1'[A0']. Man må vise at hvis $F\hat{e}Th(E;1'[A0'])$ så er $\partial(F)\hat{e}Th(E;1[A0])$. Nå er det lett å se at ∂ avbilder alle de mengdeteoretiske - og logiske aksiomene i E;1'[A0'] på teoremer i E;1[A0]. Videre er det lett å se at hvis $\partial(F)$ og $\partial(F \rightarrow G)$ er teoremer i E;1[A0] så er $\partial(AxF)$ og $\partial(G)$ det også. Det vil derfor være tilstrekkelig å vise at $\partial(U1)$ og at $\partial(A0') - \partial(A11')$ er teoremer i E;1[A0]. I alt blir det derfor tretten formler som må undersøkes. Et helt detaljert bevis blir derfor som man skjønner meget langt. Imidlertid er det nokså lett å se at $\partial(A0') - \partial(A6')$ er teoremer i E;1[A0] og at $\partial(U1)$ er det. Dette kan leseren selv sjekke som en øvelse om man ønsker det. Det gjenstår derfor bare å betrakte aksiomene A7' – A11'. Av disse kan man kutte vekk A10' som lett følger fra de øvrige.

(i) Man ser at $\partial(A7')$ er den følgende formel:

(1) $\partial(At;n(y;1)) \& \partial(At;n(y;2)) \& n\hat{e}N \& (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (Ax)(\partial(H(x,y;1,w)) \leftrightarrow \partial(H(x,y;2,w)))) \rightarrow y;1=y;2$

Man må vise at dette er et teorem i E;1[A;0]. Anta derfor at:

(2) $\partial(At;n(y;1)) \& \partial(At;n(y;2)) \& n\hat{e}N$ og
(3) $(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (Ax)(\partial(H(x,y;1,w)) \leftrightarrow \partial(H(x,y;2,w))))$

Vi sondrer mellom to tilfelle:

Tilfelle (a): nê(N-{0}). Da har man n≥1. Fra dette og (2) følger i så fall ved hjelp av definisjonen av ∂ at (4) At;n(y;1) & At;n(y;2) & nê(N-{0}). (4) og aksiom A7 i E;1[A0] impliserer y;1=y;2 om man kan vise:

(+) (Aw)(wêI –> (Ax)(H(x,y;1,w) <–> H(x,y;2,w)))

Anta derfor for vilkårlig w at (5) wêI. Da har man ved hjelp av (3) at

(6) (Ax)(∂(H(x,y;1,w)) <–> ∂(H(x,y;2,w)))

Anta først for vilkårlig x at H(x,y;1,w). Siden At;n(y;n) & n≥1 har man da ved hjelp av definisjonen av ∂ at ∂(H(x,y;1,w)). Dette og (6) impliserer ∂(H(x,y;2,w)). Men dette, definisjonen av ∂ og det faktum at At;n(y;2) & n≥1 & wêI gir en H(x,y;2,w). Tilsvarende ser man at om man antar at H(x,y;2,w) holder så kan man også utlede H(x,y;1,w). Dette viser at (+) gjelder. Fra dette kan man slutte at satsen holder i dette tilfellet.

Tilfelle (b): Anta n=0. Da følger fra (2) og definisjonen av ∂ at (7) Ut(y;1) & Ut(y;2). Fra (7) og identitetsaksiomet for utsagn, U3, som er et aksiom i E;1[A;0] følger i så fall y;1=y;2 om man kan vise:

(++) (Aw)(wêI –> (True(w,y;1) <–> True(w,y;2)))

Anta for vilkårlig w at (8) wêI. Da har man fra (3) ovenfor at:

(9) (Ax)(∂(H(x,y;1,w)) <–> ∂(H(x,y;2,w)))

Anta nå (10) True(w,y;1). Nå har man z=D for noe z der M(z) & wêI. Fra (7), (10) og disse to ting, samt definisjonen av ∂, følger ∂(H(z,y;1,w)). Dette og (9) impliserer ∂(H(z,y;2,w)). Men dette, det faktum at z=D og U(y;2) & wêI impliserer True(w,y;2). Tilsvarende viser man at True(w,y;2) om True(w,y;1). Det følger derfor at (++) holder og i kraft av identitetsaksiomet for utsagn følger i så fall at y;1=y;2. Dette viser at ∂(A7) er et teorem i E;1[A;0].

(ii) Man har at ∂(A8') er den følgende formel:

(1) ∂(At;n(x)) –> (Ey)(∂(At;n(y)) &
(Aw)(Az)(wêI & zêD^n –> (∂(H(z,y,w)) <–> ¬∂(H(z,x,w)))))

Det må bevises at denne formelen er et teorem i E;1[A;0]. Anta derfor at:

(2) ∂(At;n(x)). Tilfelle (a): nê(N-{0}). Da har man fra (2) og definisjonen av ∂ at (3) At;n(x). Det følger da ved hjelp av A8 at det finnes y der

(4) At;n(y) & (Aw)(Az)(wêI & zêD^n –> (H(z,y,w) <–> ¬H(z,x,w))))

Det er nødvendig å vise at konsekventen i (1) holder. Anta derfor for vilkårelige w,z at (5) wêI & zêD^n. Siden nê(N-{0}) og derfor n≥1 og man i lys av (3) og (4) har at At;n(x) & At;n(y) & wêI følger fra definisjonen av ∂ at

(6) (Az)(∂(H(z,x,w)) <–> H(z,x,w))

(7) (Az)(∂(H(z,y,w)) <–> H(z,y,w))

Men fra disse to formlene følger (Az)(∂(H(z,y,w)) <–> ∂(H(z,x,w))) som nettopp er det man ønsker i dette tilfellet.

Tilfelle (b): n=0. Fra (2) og definisjonen av ∂ følger da (8) U(x). Men fra (8) og de utsagnsteoretiske aksiomene i E;1[A;0] utleder vi lett negasjonsaksiomet for utsagn. Fra dette og (8) følger så eksistensen av y der man har:

(9) U(y) & (Aw)(wêI –> (True(w,y) <–> ¬True(w,x)))

Man må nå forsøke å vise at konsekventen i (1) holder. Siden n=0 har man at (10) ∂(At;n(y)) ved hjelp av den første konjunkten i (9) og definisjonen av ∂. Anta for vilkårlige z,w at (11) zêD^n & wêI. Siden n=0 følger:

(12) z=Dê{D}=D^0=D^n.

Fra (11) og (9) følger (13) (True(w,y) <–> ¬True(w,x)). Men siden U(x) & U(y) og man dessuten har z=D &wêI har man i lys av definisjonen av ∂ at:

∂(H(z,y,w)) <–> True(w,y)

∂(H(z,x,w)) <–> True(w,x)

Men fra dette og (13) følger $\partial(H(z,y,w)) <\!\!-\!\!> \partial(H(z,x,w))$ som er det man ønsker.

(iii) Tenker man seg at man anvender transformasjonen ∂ på A9' er det nokså lett å se at man får det følgende resultat:

(1) $M(a) \& (Ax)(x\hat{e}a \rightarrow \partial(At;n(x))) \& n\hat{e}N \rightarrow (Ey)(\partial(At;n(y)) \&$
$(Aw)(Az)((w\hat{e}I \& z\hat{e}D;n) \rightarrow (\partial(H(z,y,w)) <\!\!-\!\!>$
$(Ax)(x\hat{e}a \rightarrow \partial(H(z,x,w))))))$

Man må altså vise at (1) er et teorem i E;1 utvidet med aksiomet A;0.

Anta derfor at (2) $M(a) \& (Ax)(x\hat{e}a \rightarrow \partial(At;n(x))) \& n\hat{e}N$. Som ved de aksiomer vi tidligere har betraktet sondres det mellom to tilfelle når det gjelder n. Tilfelle (a): $n\hat{e}(N-\{0\})$, dvs. $n\geq 1$. Da følger det ved hjelp av (2) og definisjonen av ∂ at (3) $M(a) \& (Ax)(x\hat{e}a \rightarrow At;n(x))$ Fra (3) og konjunksjonsaksiomet for egenskaper , A9, følger eksistensen av y der man har:

(4) $At;n(y) \& (Aw)(Az)((w\hat{e}I \& z\hat{e}D;n) \rightarrow$
$(H(z,y,w) <\!\!-\!\!> (Ax)(x\hat{e}a \rightarrow H(z,x,w))))$

(4) impliserer selvfølgelig at $At;n(y)$ og siden $n\hat{e}(N-\{0\})$ følger i lys av definisjonen av ∂ at (5) $\partial(At;n(y))$. Anta for vilkårlige w,z at:

(6) $w\hat{e}I \& z\hat{e}D\hat{}n \& \partial(H(z,y,w))$. Anta dessuten at (7) $x\hat{e}a$. Fra (7) og (3) følger da $At;n(x) \& n\geq 1$. Fra (4) og (6) følger – i lys av definisjonen av ∂ og A;0 at $H(z,y,w)$. Dette, (6) og (4) impliserer så $(Ax)(x\hat{e}a \rightarrow H(z,x,w))$. Fra dette og (7) følger $H(z,x,w)$ som i lys av at $At;n(x) \& n\geq 1$ impliserer $\partial(H(z,x,w))$. Dette viser at:

$\partial(H(z,y,w)) \rightarrow (Ax)(x\hat{e}a \rightarrow \partial(H(z,x,w)))$.

Kondisjonalen den andre veien bevises på en lignende måte.

Tilfelle (b): n=0. Da følger fra (2) og definisjonen av ∂ at

(8) $M(a) \& (Ax)(x\hat{e}a \rightarrow U(x))$

Man utleder lett det uendelige konjunksjonsaksiom for utsagn i E;1[A;0]. Det følger derfor fra (8) at:

(9) $U(y) \& (Aw)(w\hat{e}I. \rightarrow (True(w,y) <\!\!-\!\!> (Ax)(x\hat{e}a \rightarrow True(w,x))))$

for noe y. Anta nå for vilkårlige w,z at (10) $w\hat{e}I \& z\hat{e}D\hat{}n$. Siden n=0 følger da at (11) z=D. Det følger i så fall fra (9), det at U(y) og definisjonen av ∂ at

(12) $\partial/At;n(y))$. Anta først at $\partial(H(z,y,w))$. Siden U(y) & z=D &wêI følger da ved hjelp av A0 at True(w,y). Ved hjelp av (9) kan man da slutte at

(13) $(Ax)(x\hat{e}a \rightarrow True(w,x))$.

Anta på den annen side for vilkårlig x at (14) $x\hat{e}a$. Da har man $True(w,x) \& U(x)$. Siden $w\hat{e}I$ & z=D følger $\partial(H(z,x,w))$. Man må altså ha:

(++) $(Ax)(x\hat{e}a \rightarrow \partial(H(z,x,w)))$

Dette viser at $\partial(H(z,y,w))$ impliserer (++). Implikasjonen den andre veien overlates til leseren. Det er nå bevist at:

$\partial(H(z,y,w)) <\!\!-\!\!> (Ax)(x\hat{e}a \rightarrow \partial(H(z,x,w)))$.

Men z og w var vilkårlige entiteter som oppfylte kravet (10). Dette viser at konsekventen i (1) holder i dette tilfellet også.

(iv) Anvendes ∂ på A11' får man det følgende resultat:

(1) $w;1,w;2\hat{e}I \& w;1\neq w;2 \& M(x) \& x \text{ Inkl } D;n \& n\hat{e}N: \rightarrow$
$(Ey)(Ez)(\partial(At;n(y)) \& \partial(At;n(z)) \& (Az')(z'\hat{e}x <\!\!-\!\!> \partial(H(z',y,w;1))$
$\& (Ar)((r\hat{e}x <\!\!-\!\!> \partial(H(r,z,w;1))) \&$
$\neg(Er)(\partial(H(r,y,w;2)) \& \partial(H(r,z,w;2))))$

I forbindelse med denne formelen nevnes det at A11' først har blitt skrevet ut i primitiv notasjon før ∂ har blitt anvendt. For å vise at (1) er et teorem i E;1[A,0] anta at:

(2) $w;1,w;2\hat{e}I \& w;1\neq w;2 \& M(x) \& x \text{ Inkl } D;n \& n\hat{e}N$

holder for vilkårlige størrelser w;1, w;2, x og n. Som tidligere sondres det mellom to tilfeller:

Tilfelle (a): nê(N-{0}). I så tilfelle følger fra (2) og A11 i E;1[A,0] at det finnes y,z der man har:

(3) At;n(y) & At;n(z) & (Ar)(rêx <–> H(r,y,w;1)) &
(Ar)(rêx <–> H(r,z,w;1)) & ¬(Er)(H(r,y,w;2) & H(r,z,w;2))

Siden n≥1 & At;n(y) & w;1,w;2êI har man:

(4) (Ar)(∂(H(r,y,w;1)) <–> H(r,y,w;1))
(Ar)(∂(H(r,y,w;2)) <–> H(r,y,w;2))

Tilsvarende har man i lys av definisjonen av ∂ siden n≥1 & At;n(z) & w;1,w;2êI at:

(5) (Ar)(∂(H(r,z,w;1)) <–> H(r,z,w;1))
(6) (Ar)(∂(H(r,z,w;2)) <–> H(r,z,w;2))

Man ser nå nokså lett at (3) – (6) impliserer konesekventen i (1). Dette viser at satsen holder i dette tilfellet.

Tilfelle (b): n=0. Da har man x Inkl D^0 = {D}. Det er i så fall to muligheter nemlig (b1) x= {D} eller (b2) x=ø. Vi betrakter det siste tilfellet først, Fra aksiomene U1 – U4 i E;1[A;0] følger eksistensen av y der man har:

(7) U(y) & (Aw)(wêI –> ¬True(w,y))

Siden n=0 & U(y) har vi i overensstemmelse med definisjonen av ∂ at
(8) ∂(At;n(y)). Anta nå for reduktio ad absurdum at (Er)(∂(H(r,y,w;1)). Da har man selvfølgelig at ∂(H(r,y,w;1)) for et eller annet r. Siden U(y) & w;1êI har man da fra definisjonen av ∂ og A0 at r=D & True(w;1,y). Dette strider imidlertid mot (7). Det følger derfor at (9) ¬(Er)(∂(H(r,y,w;1))). Siden x=ø følger da:

(10) (Ar)(rêx <–> ∂(H(r,y,w;1)))

På tilsvarende vi innser man (11) ¬(Er)(∂(H(r,y,w;2))). Fra (8), (10) og (11) følger så konsekventen i (1).

Tilslutt betraktes det tilfelle at x={D}. Fra aksiomene U1 –U4 i E;1[A;0] og (2) følger eksistensen av utsagn y,z der man har:

(12) U(y) & U(z) & True(w;1,y) & True(w;1,z) &
¬(True(w;2,y) & True(w;2,z))

Siden n=0 følger ved hjelp av definisjonen av ∂ og aksiomet A;0 at

(13) ∂(At;n(y)) & ∂(At;n(z)). Videre følger:
(14) ∂(H(r,y,w;i)) <–> (True(w;i,y) & r=D) for alle r og i=1,2

Dessuten har man på en helt tilsvarende måte:

(15) ∂(H(r,z,w;i)) <–> (True(w;i,z) & r=D) for alle r og i=1,2

Fra (12), (14) og (15) følger så lett konsekventen i (1).

Dermed har vi også bevist at ∂(A11') er et teorem i E;1[A;0]. Dette avslutter beviset for Teorem 0.2. **QED**

Så langt har forholdet mellom teoriene E;1' og E;1 blitt studert. Imidlertid ble det i "Egenskaper. Del I" også beskrevet en annen variant av E;1, nemlig E;1". Det minnes om at E;1" er den teorien som fremkommer når man i språket til E;1 sløyfer konstruksjonene "U(x)" og "True(w,x)" som primitive predikater og samtidig fjerner aksiomene U2 –U4 fra listen over ikke-logiske aksiomer. I stedet innføres "U(x)" og "True(w,x)" som definerte predikater ved de følgende definisjoner:

D3 U(x) <–> (At;1(x) & (Aw)(wêI –> (Ekst;w(x) =D v Ekst;w(x)=ø)))
D4 True(w,x) <–> (U(x) & wêI & Ekst;w(x)=D)

I Del I ble det hevdet at man kunne utlede U2 –U4 i E;1". Denne påstand oppføres nå som et eget teorem som det gis bevis for:

Teorem 0.3 I teorien E;1" er formlene U2, U3 og U4 teoremer. Mao. har man at U2, U3, U4ê Th(E;1")

Bevis: (i) Vi tar først for oss U2. Skal man bevise at U2 er et teorem i E;1" må man bevise :

U(x) & U(y) & (Aw)(wêI –>(True(w,x) <–> True(w,y))): –> x=y

Anta derfor at antesedenten i denne formelen holder, mao. at:

(1) U(x) & U(y) & (Aw)(wêI –>(True(w,x) <–> True(w,y)))

Da følger at (2) At;1(x) & At;1(y). Anta for vilkårlige w,z at det følgende holder: (3) wêI & zêD & H(z,x,w). Fra (1), (3) og definisjonen av "U(x)" følger at Ekst;w(x) =D v Ekst;w(x)=ø. Men fra (3) følger at ¬(Ekst;w(x)=ø). Da har man: (4) Ekst;w(x)=D. Fra (1), (3) og (4) følger ved hjelp av D4 at True(w,x). Dette, (1) og (3) impliserer at True(w,y) som i lys av definisjon D4 berettiger en i å slutte at Ekst;w(y) = D. Fra dette og (4) følger Ekst;w(x) = Ekst;w(y). Men H(z,x,w). Da kan man slutte at zêEkst;w(x) og derfor at zêEkst;w(y). Herav H(z,y,w). Tilsvarende kan man vise at H(z,y,w) impliserer H(z,x,w). Dette innebærer at man må ha: (Aw)(wêI –> Ekst;w(x) = Ekst;w(y)). Men dette, (2) og A7 impliserer at x=y.

(ii) Man må også vise at den følgende formel, nemlig:

(Aw)(True(w,x) –> (U(x) & wêI))

lar seg utlede i E;1". Dette følger imidlertid umiddelbart fra definisjon D4.

(iii) Når det gjelder U4 er det følgende å bemerke. Som i beviset for Teorem 0.1 vil det være tilstrekkelig å vise at vi i E;1" kan utlede negasjonsaksiomet for utsagn, det uendelige konjunksjonsaksiomet og separabilitetsaksiomet. Dette gjøres under punktene (a) – (c) nedenfor:

(a) Man må vise at

U(x) –> (Ey)(U(y) & (Aw)(wêI –> (True(w,y) <–> ¬True(w,x))))

er et teorem i E;1". Anta derfor (1) U(x). Det følger da at:

(2) At;1(x) & (Aw)(wêI –> (Ekst;w(x)=D v Ekst;w(x)=ø))

I lys av aksiom A8 i E;1" må det da finnes et attributt y der vi har:

(3) At;1(y) & (Aw)(Ar)(wêI &rêD –> (H(r,y,w) <–> ¬H(r,x,w)))

Anta wêI for vilkårlig w. Det er da to muligheter: (a) Ekst;w(x)=D eller (b) Ekst;w(x)=ø. I det første tilfelle har vi at Ekst;w(y)=ø i lys av (3). I det andre tilfellet har vi at Ekst;w(y)=D. Det følger fra dette, den første konjunkten i (3) og definisjonen D3 at (4) U(y). Anta nå for vilkårlig w der wêI at True(w,y). Da har vi Ekst;w(y)=D. Fra dette og (3) følger imidlertid Ekst;w(x)=ø≠D og derfor ¬True(w,x). På tilsvarende vis ser man at ¬True(w,x) impliserer True(w,y). Dette viser at man kan utlede negasjonsaksiomet.

(b) Det er også nødvendig at man kan vise at den følgende formel er et teorem i E;1":

(0) M(a) & (Ax)(xêa –> U(x)) –> (Ey)(U(y) & (Aw)(wêI –> (True(w,y) <–> (Ax)(xêa –> True(w,x)))))

Anta derfor at (1) M(a) & (Ax)(xêa –> U(x)). Fra dette og D3 følger at:

(2) (Ax)(xêa –> (At;1(x) & (Aw)(wêI –> Ekst;wê{D,ø}))

I lys av konjunksjonsaksiomet for egenskaper finnes det da noe y som er slik at:

(3) At;1(y) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y)= SN/xêa/(Ekst;w(x))

Fra dette og (2) følger : (4) At;1(y) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y)ê{D,ø}). Herav har man i lys av definisjonen D3 at (5) U(y).

Det følger imidlertid også fra (2) og (3) at:

(6) (Aw)(wêI –> (Ekst;w(y)=D <–> (Ax)(xêa –> Ekst;w(x)=D))). Men fra dette, (5) og definisjonen D4 følger konsekventen i (0).

(c) Det vil bli vist at separabilitetsaksiomet formulert på den følgende måte kan utledes i E;1":

w;1,w;2êI & w;1≠w;2 :–> (Ez)(U(z) & True(w;1,z) & ¬True(w;2,z))

Nå vil det senere bli gitt et bevis for at den følgende sats er et teorem i E;1", nemlig:

(++) fêExp(Pt(D),I) –> (Ez)(At;1(z) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(z) = f(w)))

Det bemerkes på dette punkt at denne setningen følger direkte fra Teorem 10 i DEL I. Dessuten er det slik at vi ikke vil benytte noen av aksiomene U1 – U4 i beviset for denne satsen.

Anta nå (1) w;1≠w;2 & w;1,w;2êI for vilkårlige objekter w;1 og w;2. Definer en funksjon f;0 ved å sette:

f;0(w;1)=D & f;0(w;2)=ø &
(Aw)(wê(I-{w;1,w;2}) –> f;0(w)=ø)

Da har man f;0êExp(Pt(D),I) og at det finnes y der:

(2) At;1(y) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y) =f;0(w)). Dette følger ved hjelp av (++). Fra (2) og definisjonen av f;0 ser man at Ekst;w(y)ê{D,ø} for alle wêI. Det følger da ved hjelp av definisjon D3 at y er et utsagn, dvs. (3) U(y). Man ser videre at Ekst;(w;1)(y)=D og at man derfor i lys av D4 har at True(w;1,y). Det skulle også være klart at Ekst;(w;2)(y)=ø. Herav følger ¬True(w;2,y). Fra alt dette kan man slutte at det finnes y der U(y) & True(w;1,y) & ¬True(w;2,y). Dette viser at separabilitetsaksiomet for utsagn kan utledes i E;1".

Dette avslutter beviset for Teorem 0.3. **QED**

Teorem 0.1 – 0.3 ble nevnt, men ikke eksplisitt formulert og bevist i "Egenskaper. Del I". Vi vender oss nå mot teoremrekken Teorem 1 – Teorem 51 i Del I og vil gi bevis for disse og relaterte satser.

§2 Noen elementære teoremer i E;1

Vi tar nå for oss bevisene for de enkelte teoremer i arbeidet "Egenskaper Del I" i den rekkefølgen som de eksplisitt er oppstilt der. Den første satsen det vil bli gitt et bevis for er:

Teorem 1 (E;1) (a) At;n(y) & nê(N-{ø}) & wêI –>
(Ex)(M(x) & x= Ekst;w(y))

Bevis: Anta at forutsetningene i teoremet holder. Fra A3 følger om nê(N-{0}) at:

(1) At;n(y) –> (Ar)(H(r,y,w) –> rêD^n)

Dette innebærer at (2) Mg(r: H(r,y,w)) Inkl D^n. Ved hjelp av definisjonen av uttrykket "Ekst;w(y)" følger herav: (3) Ekst;w(y) inkl D^n. Fra A5 følger det at D er en mengde, mao. at: (4) M(D). På grunnlag av de mengdeteoretiske aksiomene i E;1 kan man imidlertid lett utlede følgende:

(5) (Ax)(M(x) –> (nê(N-{0}) –> M(x^n)))

Fra (4) og (5) følger derfor at man må ha (6) M(D^n). Fra dette, (3) samt utsondringsaksiomet følger så M(Ekst;w(y)). Dette er imidlertid åpenbart ekvivalent med (Ex)(M(x) & x=Ekst;w(y)). **QED.**

Det bør bemerkes at punkt (a) i Teorem 1, slik dette er formulert i Del I, §7, er en umiddelbar følge av teoremet ovenfor. Man behøver bare å benytte definisjonen av "Ekst;w(y)" og som kjent har man per definisjon:

Ekst;w(x) = Mg(r: H(r,x,w))

Dernest gir vi et bevis for den følgende sats:

Teorem 2 (E;1) Er nê(N-{ø}), og har man at At;n(y), gjelder:
(i) Func(EFunc;n(y))
(ii) Dom(EFunc;n(y)) = I
(iii) Rgn(EFunc;n(y)) Inkl Pt(D^n)
(iv) EFunc;n(y) ê Exp(Pt(D^n),I)

Bevis: (i) Man har at EFunc;n(y) er definert ved:
(0) EFunc;n(y) = Mg(<w, Ekst;w(y)>: wêI & At;n(y))
(Man kan i denne forbindelse konsultere Del I, §6) Anta for vilkårlige x, z;1, z;2 at: (1) <x,z;1>,>x,z;2>êEFunc;n(y). Fra dette og (0) følger eksistensen av w;1 og w;2 som er slik at:
(2) <x,z;1> = <w;1, Ekst;(w;1)(y)> & w;1êI & At;n(y)
(3) <x,z;2> = <w;2, Ekst;(w;2)(y)> & w;2êI & At;n(y)
Fra (2) og (3) følger (4) w;1=x=w;2 og dessuten at:
(5) z;1= Ekst;(w;1)(y) & z;2 = Ekst;(w;2)(y)
Men ved hjelp av (4) følger Ekst;(w;1)(y) = Ekst;(w;2)(y) Dette sammen med (5) gir en selvfølgelig z;1=z;2. Dette viser at EFunc;n(y) er en funksjon.
(ii) Anta xêDom(EFunc;n(y)) for et eller annet vilkårlig objekt x. Da finnes z slik at <x,z>ê EFunc;n(y). Fra definisjonen av "EFunc;n(y)" følger da at det finnes w slik at <x,z> = <w,Ekst;w(y)> & wêI. Da må man ha x=wêI. Dette innebærer at inklusjonen mot høyre i (ii) holder. Anta på den annen side at xêI for et eller annet vilkårlig objekt x. Siden At;n(y) & nê(N-{0}) følger da fra Teorem 1 at det finnes q slik at M(q) & q = Ekst;x(y). Da har man <x,q>êEFunc;n(y) og følgelig xêDom(EFunc;n(y)).
(iii) Anta for vilkårlig z at zêRgn(EFunc;n(y)). Da følger per definisjon eksistensen av noe x som er slik at <x,z>êEFunc;n(y). Dette impliserer:
<x,z>=<w,Ekst;w(y)> & wêI for et eller annet objekt w. Da har man:
z=Ekst;w(y) = Mg(r: H(r,y,w)). I lys av A3 følger, siden At;n(y), at
z=Mg(r: H(r,y,w)) Inkl D^n. Men herav har man sidem M(z) at zêPt(D^n). Dette viser at punkt (iii) holder.
(iv) Fra punktene (i) – (iii) fremgår det at
EFunc;n(y) Inkl Prod(I,Pt(D^n))
Det følger derfor sidem M(Prod(I,Pt(D^n))) – dette lar seg faktisk lett bevise på grunnlag av de mengdeteoretiske aksiomene i E;1 siden man har at M(I) og M(D) – at M(z) & z= EFunc;n(y) for noe z. Men fra dette, (i) – (iii) og definisjonen av Exp(Pt(D^n),I) som er :
Exp(Pt(D^n),I) = Mg(x: Func(x) & Dom(x)=I & Rgn(x) Inkl Pt(D^n))
følger EFunc;n(y) êExp(Pt(D^n),I). Dette avslutter beviset for Teorem 2. **QED.**

Vi gir så et bevis for Teorem 3 i §7 i Del I. Det dreier seg om den følgende sats:

Teorem 3 (E;1) Anta nê(N-{ø}). Da gjelder:
q;n : Mg(y: At;n(y)) -(1-1)–> Exp(Pt(D^n),I)

Bevis: Det kan først være hensiktsmessig å minne om at q;n er definert ved:
q;n = Mg(<y, EFunc;n(y)>: At;n(y))
Det som først må bevises er at (1) Dom(q;n) = Mg(y: At;n(y)). Nå har man om x er et eller annet vilkårlig element at:

xêDom(q;n) <–> (Er)(<x,r>êMg(<y, EFunc;n(y)>: At;n(y)))
<–> (Er)(Ey)(<x,r> = <y,EFunc;n(y)> & At;n(y))
<–> (Er)(Ey)(x =y & r=EFunc;n(y) & At;n(y)
<–> At;n(x)

Den siste ekvivalensen holder fordi man har:

At;n(x) <–> (Er)(M(r) & r=EFunc;n(x))

Dette følger fra Teorem 2. Det har nå blitt gitt et bevis for at (1) holder. Det er imidlertid også nødvendig å bevise: (2) Rgn(q;n) Inkl Exp(Pt(D^n),I). Anta derfor xêRgn(q;n). Da finnes det r slik at <r,x>êq;n. Dette innebærer at
<r,x>= <y,EFunc;n(y)> for noe y der man har At;n(y). Men i så fall følger det at x=EFunc;n(y)êExp(Pt(D^n),I) i lys av Teorem 2, punkt (iv).

Det fremgår nokså direkte fra definisjonen av q;n at q;n er en funksjon. Vi må imidlertid vise at den er en-entydig. Anta derfor <x;1,z>,<x;2,z>êq;n. Fra definisjonen følger da eksistensen av y;1 og y;2 der man har:

(1) <x;1,z> = <y;1, EFunc;n(y;1)> & At;n(y,1) og
(2) <x;2,z> = <y;2, EFunc;n(y;2)> & At;n(y,2)

Fra disse to ting følger så (3) x;1=y;1 & x;2=y;2 og dessuten at:

(4) EFunc;n(y;1) = EFunc;n(y;2)

Fra (4) og definisjonen av "EFunc;n(y)" følger :

(5) (Aw)(wêI –> Ekst;w(y;1) = Ekst;w(y;2))

Men fra dette, A7 samt det at At;n(y;1) & At;n(y;2) følger y;1=y;2 og derfor også x;1=x;2 som åpenbart er det vi ønsker. **QED.**

§3 Boolske operasjoner på attributter.

I denne paragrafen gis det bevis for ytterligere en del setninger som er oppført i §7 i Del I.

Først minnes det om at det n-ære nullattributtet – som her betegnes med Ø;n – er definert ved:

Ø;n = (ix)(At;n(x) & ¬(Ew)(Ey)(H(y,x,w)))

Det følgende teorem er faktisk bevist i Del I:

Teorem 4 (E;1) nê(N-{ø}) –> (Ey)(y=Ø;n)

Bevis: Se Del I, §7. **QED.**

Anta nå at x er et n-ært attributt. Da er Neg;(a,n)(x), negasjonen av x, definert ved:

Neg;(a,n)(x) = (iy)(At;n(y) & (Ar)(Aw)(rêD^n &wêI –>
(H(r,y,w) <–> ¬H(r,z,w))))

Vi gir bevis for den følgende sats som viser at det til ethvert n-ært attributt finnes et entydig bestemt attributt som er negasjonen av det.

Teorem 5 (E;1) (a) Har man at nê(N-{ø}) og At;n(x) gjelder
(Ey)(y= Neg;(a,n)(x))
(b) Er nê(N-{ø}) og At;n(x) gjelder:
Ekst;w(Neg;(a,n)(x)) = D^n – Ekst;w(x)

Bevis: (a) Anta nê(N-{0}) & At;n(x). Fra negasjonsaksiomet følger da eksistensen av y slik at:

(1) At;n(y) & (Aw)(Az)(wêI & zêD^n –> (H(z,y,w) <–> ¬H(z,x,w)))

Anta det finnes to entiteter y;1 og y;2 som oppfyller (1). Da følger:

At;n(y;1) & At;n(y;2) & (Aw)(wêI –> Mg(z: H(z,y;1,w) = Mg(z: H(z,y;2,w)))

Men fra dette og A/ følger y;1=y;2. Det finnes altså nøyaktig ett objekt som oppfyller (1). La oss kalle dette objektet y. Da må man altså ha at y=Neg;(a,n)(x) og følgelig at (Ey)(y=Neg;(a,n)(x)).

(b) Anta igjen at nê(N-{0}) & At;n(x) og anta for vilkårlig w at wêI. Fra punkt (a) følger det at (1) y=Neg;(a,n)(x) for et eller annet y. Videre må man ha:

(2) At;n(y) & (Aw)(Az)(wêI & zêD^n –> (H(z,y,w) <–> ¬H(z,x,w)))

Siden wêI følger fra dette at :

(3) (Az)(zêD^n –> (H(z,y,w) <–> ¬H(z,x,w)))

Anta for vilkårlig z at zêEkst;w(y). Dette innebærer at H(z,y,w). Siden At;n(y) følger da ved hjelp av A3 at zêD^n. I lys av (3) følger i så fall at zêD^n og dessuten at ¬(zêEkst;w(x)). Dette vil si at zê(D^n – Ekst;w(x)).

Er på den annen side zê(D^n – Ekst;w(x)) følger zêD^n & ¬H(z,x,w). Fra dette og (3) har man H(z,y,w), dvs. zêEkst;w(y). Men fra dette og (1) følger zêEkst;w(Neg;(a,n)(x)). Dette avslutter beviset. **QED.**

Konjunksjonen av de n-ære attributtene i mengden x, Kon;(a,n)(x) er definert ved:

Kon;(a,n)(x) = (iy)(At;n(y) & (Az)(Aw)(wêI & zêD^n –>
(H(z,y,w) <–> (Ar)(rêx –> H(z,r,w)))))

Tilsvarende er disjunksjonen av de n-ære egenskapene i mengden x, Dis;(a,n)(x) definert ved:

Dis;(a,n)(x) = (iy)(At;n(y) & (Az)(Aw)(wêI & zêD^n –>
(H(z,y,w) <–> (Er)(rêx & H(z,r,w)))))

Se i denne forbindelse definisjonene (4) og (5) i §7 i Del I. I forbindelse med disse to begrepene skal det gis et bevis for den følgende sats:

Teorem 6 (E;1) Anta nê(N-{ø}) og M(x) & x Inkl A;n. Da gjelder:
(i) (Ey)(y = Kon;(a,n)(x))
(ii) (Ey)(y = Dis;(a,n)(x))
(iii) (Aw)(wêI –> Ekst;w(Kon;(a,n)(x))= D^nΩ SN/yêx/(Ekst;w(y)))
(iv) (Aw)(wêI –> Ekst;w(Dis;(a,n)(x))= UN/yêx/(Ekst;w(y)))

Bevis: (i) Fra forutsetningene i teoremet og A9 følger eksistensen av y der man har:

(1) At;n(y) & (Az)(Aw)(zêD^n & wêI –>
(H(z,y,w) <–> (Ar)(rêx –> H(z.r,w))))

Man ser imidlertid lett på grunnlag av A7 (Identitetsaksiomet for egenskaper), A3 og (1) at denne y må være entydig bestemt. Fra dette, (1) og definisjonen av Kon;(a,n)(x) følger så (Ey)(y= Kon;(a,n)(x)).

(ii) Fra M(x) & x Inkl A;n følger i lys av Teorem 5, punkt (a) at
(Ar)(rêx –> (Ey)(y= Neg;(a,n)(r)))

Fra definisjonen av Neg;(a,n)(r) har vi Neg;(a,n)(r)êA,n om det finnes noe y som er slik at y=Neg;(a,n)(r) og rêA;n & nê(N-{0}). Det følger fra dette at:

(1) Mg(Neg;(a,n)(r): rêx) Inkl A;n

Siden M(A;n) (Se i denne forbindelse A4) følger (2) M(Mg(Neg;(a,n)(r) : rêx)

Fra (1) og (2) samt konjunksjonsaksiomet A9 følger eksistensen av y som er slik at:

(3) At;n(y) & (Az)(Aw)(zêD^n & wêI –>

(H(z,y,w) <–> (Ar)(rêMg(Neg;(a,n)(q): zêx) –> H(z,r,w))))

Fra dette følger (4) At;n(y) og dessuten at:

(5) (Az)(Aw)(zêD^n & wêI –>
(H(z,y,w) <–> (Aq)(qêx –> H(z,Neg;(a,n)(q),w))))

Nå har man videre at:

(6) H(z,Neg;(a,n)(q),w) <–> zêEkst;w(Neg;(a,n)(q))
<–> zê D^n – Ekst;w(q)
<–> zêD^n & ¬H(z,q,w)

Fra (6) og (5) kan man slutte:

(7) (Az)(Aw)(zêD^n & wêI –>
(H(z,y,w) <–> (Aq)(qêx –> ¬H(z,q,w))))

Fra (4) og Teorem 5, punkt (a), følger eksistensen av r som er slik at (8) r= Neg;(a,n)(y). Fra dette og definisjonen av "Neg;(a,n)(y)" følger selvfølgelig at (9) At;n(r).

Anta for vilkårlige w og z at (10) wêI & zêD^n. Da har man i lys av (8), Teorem 5 og (7) at:

(11) H(z,r,w) <–> ¬H(z,y,w) <–> ¬(Aq)(qêx –> ¬H(z,q,w))
<–> (Eq)(qêx & H(z,q,w))

Det følger fra dette at:

(12) (Az)(Aw)(zêD^n & wêI –>
(H(z,r,w) <–> (Eq)(qêx&H(z,q,w))))

Anta at det finnes noe annet r;2 som oppfyller setningene (9) og (12). Da har man At;n(r) & At;n(r;2). Og i lys av (12) vil man i så tilfelle også ha:

Mg(z: H(z,r,w)) = Mg(z: H(z,r;2,w) for alle wêI.

Det følger da ved hjelp av identitsaksiomet for egenskaper at r= r;2. Fra dette, (9), (12) og definisjonen av Dis;(a,n)(x) følger (Ey)(y= Dis;(a,n)(x)). Man ser fra dette og definisjonen av Dis;(a,n)(x) at man også må ha At;n(Dis;(a,n)(x)).

(iii) Fra punkt (i) og definisjonen av Kon;(a,n)(x) fremgår det at det finnes y der :

(1) At;n(y) & (Aw)(Az)(wêI & zêD^n –>
(H(z,y,w) <–> (Ar)(rêx –> H(z,r,w))))

og hvor man dessuten har: (2) y= Kon;(a,n)(x). Man må da ha, om w og z er vilkårlige elementer der wêI og zêD^n at:

H(z,Kon;(a,n)(x),w) <–> H(z,y,w)
<–> H(z,y,w) & zêD^n
<–> zê(SN/rêx/Ekst;w(r) Ω D^n)

Herav har man: Ekst;w(Kon;(a,n)(x)) = SN/rêx/Ekst;w(r) Ω D^n

(iv) Fra punkt (ii) i teoremet og definisjonen av Dis;(a,n)(x) følger det at det finnes y der man har at:

(1) y=Dis;(a,n)(x)

(2) At;n(y) & (Az)(Aw)(zêD^n & wêI –>
(H(z,y,w) <–> (Er)(rêx & H(z,r,w))))

Anta nå at wêI og zêD^n for vilkårlige entiteter w og z. Da har man:

zêEkst;w(y) <–> zêEkst;w(Dis;(a,n)(x))
<–> H(z,y,w)
<–> (Er)(rêx & H(z,r,w))
<–> zêUN/rêx/(Ekst;w(r))

Dette innebærer at Ekst;w(Dis;(a,n)(x))= UN/rêx/(Ekst;w(r)).

Dette avslutter beviset for Teorem 6. **QED.**

Beviset ovenfor er et rent rutinebevis og er egentlig uten dypere teksnisk eller annen interesse. Det gis her bare fordi vi ønsker å gi et mest mulig fullstendig belegg for alle de vesentlige teoretiske påstandene i Del I, og fordi vi gjerne vil kontrollere riktigheten av alle våre definisjoner i detalj.

Operasjonene K;n og N;n over Exp(Pt(D^n),I) ble introdusert ved definisjonene (9) og (10) i §7 i Del I. La oss gi definisjonene på nytt igjen her:

(a) K;n(x) = (if)(fêExp(Pt(D^n),I) & (Aw)(Az)(wêI & zêD^n –>
(zêf(w) <–> (Ay)(yêx –> zêy(w)))))

(b) N;n(x) = (if)(fêExp(Pt(D^n),I) & (Aw)(Az)(wêI & zêD^n –>
(zêf(w) <–> ¬(zêx(w)))))

Vi gir nå et bevis for det følgende "lukningsteorem" hvor de to siste punktene sier at Exp(Pt(D^n),I) er lukket under operasjonene K;n og N;n.

Teorem 7 (E;1) Anta nê(N-{ø}). Da gjelder:
(i) (Ax)(M(x) & x Inkl A;n. –> Kon;(a,n)(x)êA;n)
(ii) (Ax)(xêA;n –> Neg;(a,n)(x) êA;n)
(iii) (Ax)(M(x) & x Inkl Exp(Pt(D^n),I) –> K;n(x)êExp(Pt(D^n),I))
(iv) (Ax)(xêExp(Pt(D^n),I) –> N;n(x)êExp(Pt(D^n),I))

Bevis: De to første punktene i denne satsen følger umiddelbart fra Teorem 5 og Teorem 6 samt definisjonene av operasjonene Kon;(a,n)(x) og Neg;(a,n)(x).

(iii) Anta M(x) & x Inkl Exp(Pt(D^n),I). Definer en funksjon k(x) ved:
k(x) = Mg(<w, D^n Ω SN/rêx/(r(w))>: wêI)

Man kan da lett vise at det finnes en y som er slik at y=k(x). Videre kan man lett vise at y er entydig bestemt og at y oppfyller det følgende krav:

yêExp(Pt(D^n,I)) & (Az)(Aw)(wêI & zêD^n –>
(zêy(w) <–> (Ar)(rêx –> zêr(w))))

Da har man imidlertid at y= K;n(x) og at K;n(x)êExp(Pt(D^n,I)).

(iv) Anta xêExp(Pt(D^n,I)). Definer en funksjon f(x) ved:
f(x) = Mg(<w,D^n-x(w)> : wêI)

Det er lett å vise at (1) f(x)êExp(Pt(D^n,I)). Det føres ikke noe detaljert bevis for dette her. Det er imidlertid også lett å vise at :

(2) (Aw)(Az)(zêD^n & wêI –> (zêf(x)(w) <–> ¬(zêx(w))))

Videre er det ingen vanskeligheter forbundet med å godgjøre at hvis g er en annen funksjon som oppfyller kravene (1) og (2) så har man g=f(x). Man har derfor at det finnes en y slik at y=f(x). Dessuten må man ha i lys av definisjonen av N;n(x) at y=N;n(x). Det følger at N;n(x)êExp(Pt(D^n,I)). **QED.**

Den neste satsen som det her vil bli gitt et bevis for er:

Teorem 8 (E;1) (Homomorfi-teorem) Anta nê(N-{ø}). Da gjelder de følgende påstander om avbildningen q;n:
(i) q;n : A;n –(1-1)–> Exp(Pt(D^n),I)
(ii) (Ax)(xêA;n –> q;n(Neg;(a,n)(x)) = N;n(q;n(x)))
(iii) (Ax)(M(x) & x Inkl A;n –>
q;n(Kon;(a,n)(x)) = K;n(Mg(q;n(y): yêx)))

Bevis: (i) Dette punktet i teoremet følger direkte fra Teorem 3 siden man per definisjon har at A;n= Mg(z: At;n(z)).

(ii) Anta xêA;n for vilkårlig x. Man har :

q;n(Neg;(a,n)(x))=EFunc;n(Neg;(a,n)(x)) = Mg(<w, Ekst;w(Neg;(a,n))>: wêI)

Det skulle være klart ut fra dette at q;n(Neg;(a,n)(x)) êExp(Pt(D^n,I)). Nå har man videre:

N;n(q;n(x))= (iy)(yêExp(Pt(D^n,I)) & (Aw)(Az)(wêI & zêD^n –>
(zêy(w) <–> ¬(zêq;n(x)(w)))))

Fra dette og det foregående teorem følger det at det finnes en y der :

(1) y= N;n(q;n(x))

(2) yêExp(Pt(D^n,I)) & (Aw)(Az)(wêI & zêD^n –>
(zêy(w) <–> ¬(zêq;n(x)(w)))))

Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise:

(3) Mg(<w, Ekst;w(Neg;(a,n)(x))>: wêI) = y For dette formål er det i sin tur tilstrekkelig å bevise:

(4) (Aw)(wêI –> Ekst;w(Neg;(a,n)(x)) = y(w))

Anta derfor wêI for vilkårlig w. Da har man om z er et eller annet vilkårlig objekt at:

zêEkst;w(Neg;(a,n)(x)) <–> zêD^n & ¬H(z,x,w)
<–> zêD^n & ¬(zêEkst;w(x))
<–> zêD^n & ¬(zêq;n(x)(w))
<–> zêy(w)

Den siste ekvivalensen følger ved hjelp av (2). Dette viser imidlertid at (4) holder og avslutter dermed beviset for punkt (ii) i teoremet.

(iii) Anta M(b) & b Inkl A;n. Da har man:

(1) q;n(Kon;(a,n)(b))= EFunc;n(Kon;(a,n)(b)) =
Mg(<w, Ekst;w(Kon;(a,n)(b))>: wêI)

Videre følger ved hjelp av tidligere teoremer at det finnes y der man har:

(1.1) y= K;n(Mg(q;n(x): xêb))

(2) yêExp(Pt(D^n),I) & (Az)(Aw)(wêI & zêD^n –>
(zêy(w) <–> (Ax)(xêb –> zêq;n(x)(w))))

Det vil være tilstrekkelig å bevise at y=q;n(Kon;(a,n)(b)). Fra (1) og (2) ser man da at det vil være tilstrekkelig å bevise for alle wêI :

(Az)(zêEkst;w(Kon;(a,n)(b)) <–> zêy(w))

Nå har man:

zêEkst;w(Kon;(a,n)(b)) <–> H(z,Kon;(a,n)(b),w)
<–> (Ax)(xêb –> zêEkst;w(x))
<–> (Ax)(xêb –> zêq;n(x)(w))
<–> zêy(w)

Den siste ekvivalensen følger i lys av (2). Dette viser riktigheten av punkt (iii) i teoremet.
QED.

Det neste teoremet er viktig og noe mer "substansielt" enn det foregående:

Teorem 9 (E;1) Anta wêI & M(x) & x Inkl D^n & nê(N-{ø}). Da gjelder:
(Ea)(aêA;n & Ekst;w(a) = x & (Aw')(w'ê(I-{w}) –> Ekst;w'(a)=ø))

Bevis: Anta (1) wêI & M(x) & x Inkl D^n & nê(N-{0}). Vi definerer C(w;1) der w;1ê(I-{w}) ved:

(2) C(w;1) = Mg(<a,b>: a,bêA;n & Ekst;w(a)= x = Ekst;w(b) &
(Ekst;w(a) Ω Ekst;w(b)) =ø)

Fra (1) og (2) samt separabilitetsaksiomet for egenskaper har man:

(3) (Aw;1)(w;1ê(I-{w}) –> C(w;1)≠ø)

I lys av utvalgsaksiomet finnes det da en funksjon ¥ som er slik at:

(4) Func(¥) & Dom(¥)=(I-{w}) & (Aw;1)(w;1ê(I-{w}) –> ¥(w;1)êC(w;1))

Definer p og q ved:

(5) p= Mg(<w;1,π(¥(w;1),1)> : w;1ê(I -{w})

(6) q= Mg(<w;1,π(¥(w;1),2)> : w;1ê(I -{w})[1]

Gitt disse definisjonene har man:

(7) Func(p) & Func(q) & Dom(p) = Dom(q) = (I-{w}) &
Rgn(p) Inkl A;n & Rgn(q) Inkl A;n

Man har dessuten at:

(8) Ekst;w(p(w;1)) = Ekst;w(q(w;1)) = x &
(Ekst;w;1(p(w;1)) Ω Ekst;w;1(q(w;1))) = ø

for alle w;1ê(I-{w}). Vi definerer nå en egenskap E;0 ved:

(9) E;0 = SN/w;1ê(I-{w})/(Kon;(a,n)({q(w;1),p(w;1)}))

Siden q(w;1),p(w;1)êA;n for alle w;1ê(I-{w}) har man at

Kon;(a,n)({q(w;1),p(w;1)})êA;n

ved hjelp av konjunksjonsaksiomet for egenskaper. Det følger at:

(10) Mg(Kon;(a,n)({q(w;1),p(w;1)}): w;1ê(I-{w}) Inkl A;n

og at Mg(Kon;(a,n)({q(w;1),p(w;1)}): w;1ê(I-{w}) faktisk er en mengde. I lys av det uendelige konjunksjonsaksiom for egenskaper har man i så fall (11) E;0êA;n [2]

I lys av Teorem 6 og (8) ovenfor har man nå, siden wêI, at:

(12) Ekst;w(E;0)
= Ekst;w(Kon;(a,n)(Mg(Kon;(a,n)({q(w;1),p(w;1)}): w;1ê(I-{w})))
= SN/w:1ê(I-{w})/(Ekst;w(Kon;(a,n)({p(w;1),q(w;1)})))
= SN/w;1ê(I-{w})/(Ekst;w(q(w;1)) Ω Ekst;w(p(w;1))) = x

Videre har man om w;1ê(I-{w}) at:

(13) Ekst;(w;1)(E;0)
= Ekst;(w;1)(Kon;(a,n)(Mg(Kon;(a,n)({q(w'),p(w')}): w'ê(I-{w})))
= SN/w'ê(I-{w})/(Ekst;(w;1)(Kon;(a,n)({q(w'),p(w')})))
Inkl Ekst;(w;1)(q(w;1)) Ω Ekst;(w;1)(p(w;1) =ø

Av denne grunn må man derfor ha:

(14) (Aw;1)(w;1ê(I-{w}) –> Ekst;(w;1)(E;0) =ø)

Fra (11), (12) og (14) følger så konsekventen i teoremet. Dette avslutter beviset. **QED.**

Man ser at vi i beviset for teoremet ovenfor benytter separabilitetsaksiomet for egenskaper, det uendelige konjunksjonsaksiomet og utvalgsaksiomet. Disse aksiomene synes å bli brukt på en vesentlig måte i beviset. Kuttet man vekk et eller flere av disse aksiomene fra E;1 virker det rimelig å tro at man ikke kan utlede Teorem 9.

Den neste satsen som det vil bli gitt et bevis for er denne:

Teorem 10 (E;1) Anta zêExp(Pt(D^n),I) & nê(N-{ø}). Da gjelder:
(Ea)(aêA;n & (Aw)(wêI –> Ekst;w(a) = Mg(x: xêD^n & xêz(w))))

---

[1] Merk at om z er et ordnet par <a,b> betegner "π(z,1)" den første komponenten i dette paret, mens "π(z.2)" betegner den andre komponenten. Denne notasjonelle konvensjonen er bare ment å være gyldig i dette beviset.

[2] Det bør bemerkes at vi også kunne ha formulert definisjonen av E;0 slik:
E;0 = Kon;(a,n)(Mg(Kon;(a,n)({q(w;1),p(w;1)}): w;1ê(I-{w}))

Bevis: Anta (1) zêExp(Pt(D^n),I) & nê(N-{ø}). definer for wêI en mengde Q(w) ved:

(2) Q(w) = Mg(a: aêA;n& Ekst;w(a) =z(w) &
(Aw')(w'ê(I-{w}) –> Ekst;w'(a)=ø))

Fra Teorem 9 har vi da at (3) (Aw)(wêI –> Q(w)≠ø). I lys av utvalgsaksiomet finnes det da en funksjon g som oppfyller de følgende krav:

(4) Func(g) & Dom(g)=I & (Aw)(wêI –> g(w)êQ(w))

Definer egenskapen e;1 ved: e;1= Dis;(a,n)(Mg(g(w): wêI)). Er wêI har vi i lys av (4) at g(w)êQ(w) og fra dette og dfinisjonen av "Q(w)" følger (6) g(w)êA;n. Det følger at (7) Mg(g(w): wêI) Inkl A;n og at Mg(g(w): wêI) er en mengde. Fra dette følger at (8) e;1êA;n i lys av Teorem 6 og Teorem 7. (Merk at det er på dette punkt at vi trekker inn negasjonsaksiomet. For har man M(b) & b Inkl A;n kan man bare vise at Dis;(a,n)(b)êA;n ved hjelp av konjunksjons- og negasjonsaksiomet) Det er nå nødvendig å gi bevis for den følgende påstand:

(+) (Aw)(wêI –> Ekst;w(e;1) = z(w))

Anta derfor at w er et vilkårlig objekt der man har (9) wêI. Da har vi i lys av (5) og tidligere teoremer at:

(10) Ekst;w(e;1) = Ekst;w(Dis;(a,n)(Mg(g(w): wêI)))
= UN/rêI/(Ekst;w(g(r)))

Anta videre at r er et vilkårlig objekt som er slik at rê(I - {w}). Da har man at g(r)êQ(r) og følgelig i lys av (2) at:

(11) Ekst;r(g(r)) = z(r) & (Aw')(w'ê(I - {r}) –> Ekst;w'(g(r)) =ø)

Det følger at wê(I - {r}) og derfor ved hjelp av (11) at Ekst;w(g(r)) = ø. Nå var imidlertid r et vilkårlig objekt hvor rê(I - {w}). Man kan derfor konkludere med at (12) (Ar)(rê(I - {w}) –> Ekst;w(g(r)) =ø). Fra dette følger at:

(13) UN/rê(I - {w})/(Ekst;w(g(r))) =ø.

På den annen side må vi imidlertid i lys av (2) ovenfor ha:

(14) Ekst;w(g(w)) = z(w) siden g(w)êQ(w).

Fra (13) og (14) følger at:

(15) UN/rêI/(Ekst;w(g(r)))
= UN/rê(I - {w})/(Ekst;w(g(r))) U Ekst;w(g(w))
= ø U z(w) = z(w).

(15) og (10) gir en åpenbart Ekst;w(e;1) = z(w). Men w var en vilkårlig entitet som oppfylte betingelsen (9). Det følger derfor at (+) holder. Men fra (8) og (+) følger konsekventen i teoremet. **QED.**

Den neste satsen som vi vil gi bevis for er denne:

Teorem 11 (E;1) nê(N-{ø}) –> q;n : A;n –(1-1,på)–> Exp(Pt(D^n),I)

Dette er naturlig nok et viktig teorem og viser at q;n ikke bare er en homomorfi mellom A;n og Exp(Pt(D^n),I), men også en isomorfi mellom disse to mengdene.

Bevis: I lys av Teorem 8, punkt (i), har man om nê(N-{ø}) at:

q;n : A;n –(1-1–> Exp(Pt(D^n),I)

For å vise at Teorem 11 holder er det derfor tilstrekkelig å vise at q;n avbilder A;n på Exp(Pt(D^n),I). Anta derfor for vilkårlig z at (1) zêExp(Pt(D^n),I). Fra Teorem 10 følger da eksistensen av et attributt a der man har:

(2) aêA;n & (Aw)(wêI –> Ekst;w(a) = z(w))

Det vil være tilstrekkelig å vise at q;n(a) =z. Nå har man at:

q;n(a) = EFunc;n(a) = Mg(<w,Ekst;w(a)>: wêI)

Man må derfor bevise at:

(++) Mg(<w,Ekst;w(a)>: wêI)=z

Fra (1) følger imidlertid Func(z) & Dom(z)=I og dessuten har man ved hjelp av et tidligere teorem at Func(EFunc;n(a)) & Dom(EFunc;n(a))=I. Det vil derfor være nok å vise at:

(Aw)(wêI –> z(w)= EFunc;n(a)(w) = Ekst;w(a))

Men dette følger direkte fra (2). **QED.**

Man ser umiddelbart at den formelen som Teorem 10 sier er et teorem i E;1 ikke er noe annet enn A12. Dette aksiom formulerte vi tidligere slik:

A12 Func(f) & Dom(f)=I & Rgn(f) Inkl D^n & nê(N-{ø}) –>
(Ez)(At;n(z) & (Aw)(wêI –> Ekt;w(z) = f(w)))

Det følgende teorem er derfor bare en triviell reformulering av Teorem 10:

Teorem 12 (E;1) A12

Bevis: Følger fra definisjonen av A12 og Teorem 10. **QED.**

Ved hjelp av teorem 12 kan man også lett vise den følgende sats:

Teorem 13 (Metateorem) Th(E;2) Inkl Th(E;1)

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på mengden av teoremer i E;2. Man har at alle de logiske aksiomene i E;2 er aksiomer i E;1. Det samme gjelder de mengdeteoretiske aksiomene. Når det gjelder de øvrige aksiomer i E;2, som A1 – A7, A12, samt U1 – U4 er alle disse aksiomer i E;1 bortsett fra A12. Men dette har vi nå vist at er et teorem i E;1. Det følger at alle de logiske såvel som de ikke-logiske aksiomene i E;2 er teoremer i E;1. Siden slutningsreglene er de samme i de to teoriene, nemlig modus ponens og universell generalisering, følger det at alle teoremer i E;2 er teoremer i E;1. **QED.**

§8 Instanser av egenskaper.

Vi har så langt gitt bevis for de teoremene som er formulert i §7 i Del I. I denne paragrafen skal vi ta for oss de teoremene som er formulert i §8 og gi bevis for dem.

Utsagnet at z har egenskapen x, u(x,z), er definert ved:

(1) u(z,x) = μ;-1(Mg(w: wêI & H(z,x,w)))

Er nê(N-{ø}) er funksjonen p;n definert ved:

(2) p;n = Mg(<x, (dzêD^n)(u(z,x))> : At;n(x))

Det følgende teorem er sentralt i §8 i Del I:

Teorem 14 (E;1) p;n : A;n –(1-1,på)–> Exp(U,D^n)

Det kan være instruktivt å sammenligne dette med Teorem 11.

Bevis: Det er først naturlig å bevise at Dom(p;n)=A;n. Anta derfor at rêDom(p;n). Da finnes det q slik at <r,q>êp;n. Fra dette og definisjonen ovenfor som ble gitt av p;n følger: <r,q> = <x,(dzêD^n)(u(z,x))> for noe xêA;n. Det følger da at r=xêA;n. Anta på den annen side at rêA;n. Fra definisjon (1) fremgår det da at (Az)(zêD^n –> u(z,r)êU). Nå har man at (dzêD^n)(u(z,r)) Inkl Prod(D^n,U) og det følger derfor på grunnlag av våre mengdeteoretiske

aksiomer at det finnes q som er slik at q= (dzêD^n)(u(z,r)). Da må man ha at <r,q>êp;n og følgelig at
rêDom(p;n). Det er forholdsvis lett å vise at p;n er en funksjon. Denne oppgaven overlates derfor til leseren. La oss imidlertid vise at p;n er en-entydig. Anta for vilkårlige entiteter r, s;1 og s;2 at <s;1,r>,<s;2,r>êp;n. Da må det finnes x;1 og x;2 slik at :

(1) x;1,x;2ê A;n & <s;1,r>= <x;1, (dzêD^n)(u(z,x;1))> &
<s;2,r>= <x;2, (dzêD^n)(u(z,x;2))>

Herav har man s;1=x;1 og s;2 = x;2. Det følger videre at

(2) (dzêD^n)(u(z,x;1)) = (dzêD^n)(u(z,x;2))

Anta nå for reduktio ad absurdum at (3) x;1≠x;2. Fra (1), (3) og (A7) følger det da at det finnes en mulig verden w der man har at (4) Ekst;w(x;1) ≠ Ekst;w(x;2). Dette innebærer at et finnes z slik at man enten har H(z,x;1,w) & ¬H(z,x;2,w) eller omvendt. Vi ser her bare på det første tilfellet siden det andre kan behandles på en helt analog måte. Anta derfor at (5) H(z,x;1,w) & ¬H(z,x;2,w). Siden x;1êA;n og man dessuten har wêI følger zêD^n ved hjelp av A3. Fra dette og (2) følger
u(z,x;1) = u(z,x;2). Fra dette og definisjonen av u ovenfor kan man så ved hjelp av identitetsaksiomet for utsagn slutte:

(6) Mg(w: wêI & H(z,x;1,w)) = Mg(w: wêI & H(z,x;2,w))

Men fra (5), (6) og det at wêI utleder vi en motsigelse. Det følger at x;1=x;2 og derfor at s;1=s;2.

Det siste som må bevises er at (+) Rgn(p;n) = Exp(U, D^n). Anta først for vilkårlig r at rêRgn(p;n). Da finnes det s slik at <s,r>êp;n. Dette innebærer at:

<s,r> = <x,(dzêD^n)(u(z,x))> & At;n(x) for noe x. Da har man åpenbart: r=(dzêD^n)(u(z,x)). Men u(z,x)êU om zêD^n. Dette følger fra definisjonen av "u(z,x)". Derfor må man ha rêExp(U,D^n) siden det er åpenbart at r er en funksjon og at domenet til r er D^n. Disse overveielsene viser at inklusjonen mot høyre i formelen (+) holder.

Man må selvfølgelig også vise inklusjonen mot venstre i (+). Anta for vilkårlig r at rêExp(U,D^n). Definer X(r) ved:

(7) X(r)=Mg(<w,Mg(z: zêD^n & True(w,r(z))> : wêI)

Det er da lett å se at:

(8) Func(X(r)) & Dom(X(r)) = I & Rgn(X(r)) Inkl Pt(D^n)

Det følger at X(r)êExp(Pt(D^n),I). Fra dette og Teorem 11 følger så at
(q;n);-1(X(r))êA;n. Det vil nå være tilstrekkelig å bevise at:

r= (dzêD^n)(u(z, (q;n):-1(X(r))))

Det vil altså være nok å vise: (Az)(zêD^n –> r(z) = u(z, (q;n):-1(X(r)))).

Anta zêD^n. Det må følgelig etableres at r(z) = u(z, (q;n):-1(X(r))). Det er da nok å godtgjøre at (9) True(w,r(z)) <–> H(z, (q;n):-1(X(r)), w) for alle wêI. Nå har man imidlertid i lys av definisjonen av q;n at:

(Ax)(xêA;n –> Ekst;w(x) = (q;n(x))(w)). Brukes dette har man:

H(z, (q;n):-1(X(r)), w) <–> zêEkst;w((q;n):-1(X(r)))
<–> zê(q;n((q;n):-1(X(r))))(w)
<–> zê(X(r))(w)
<–> True(w,r(z))

Merk at den siste ekvivalensen følger ved hjelp av definisjonen av X(r). Dette viser at (9) holder og avslutter dermed beviset for Teorem 14. **QED.**

La oss så gi bevis for:

Teorem 15 (E;1) (a) Er fêExp(U,D^n) og nê(N-{ø}) gjelder:

(E!a)(At;n(a) & (Az)(zêD^n –> u(a,z)=f(z)))

(b) Er nê(N-{ø}) og At;n(a) gjelder videre:

(E!f)(fêExp(U,D^n) & (Az)(zêD^n –> u(a,z) = f(z)))

Bevis: (a) Anta fêExp(U,D^n) & nê(N-{ø}). Fra Teorem 14 har man da at:
(1) (p;n);-1(f)êA;n. Anta zêD^n. Vi ønsker å vise at :

(2) u(z, (p;n);-1(f)) = f(z)

Sett a;0 = (p;n);-1(f). Fra (1) har man da at a;0ê A;n. I lys av definisjonen av p;n har man videre p;n(a;0) = (dzêD^n)(u(z,a;0)). Man har derfor om zêD^n at

(4) p;n(a;0)(z) = u(z,a;0) = u(z, (P,n);-1(f))

På den annen side har man også det følgende:

(5) p;n(a;0)(z) = p;n((p;n);-1(f))(z)
= ((p:n°((p;n);-1)(f))
= f(z)

Fra (4) og (5) følger så (2). Det som er blitt bevist så langt er derfor at:

(6) a;0êA;n & (Az)(zêD^n –> u(z,a;0)=f(z))

Anta nå for en eller annen vilkårlig entitet y at:

(7) yêA;n & (Az)(zêD^n –> u(z,y)=f(z))

For å fullføre beviset for satsen er det da nødvendig å bevise y=a;0. Anta for reduktio ad absurdum y≠a;0. Siden y,a;0êA;n har vi da i lys av A7 at

(8) (H(z,y,w) & ¬H(z,a;0,w)) v (¬H(z,y,w) & H(z,a;0,w))

Vi studerer bare det første tilfelle. Siden zêD^n følger fra (6) og (7) at
(9) u(z,y) = u(z,a;0). Dette innebærer i lys av definisjonen av u og det faktum at μ er en en-entydig funksjon at:

Mg(w: wêI & H(z,a;0,w)) = Mg(w: wêI & H(z,y,w)).

Men dette strider mot (8). Dette avslutter beviset for punkt (a).

(b) Anta nê(N-{ø}) & At;n(a). definer f;0 ved f;0=(dzêD^n)(u(z,a)). Da har man åpenbart (1) f;0êExp(U,D^n) & (Az)(zêD^n –> u(z,a) = f;0(z)). Anta at det f;1 er slik at (2) f;1êExp(U,D^n) & (Az)(zêD^n –> u(z,a) = f;1(z)). Da følger:
(Az)(zêD^n –> f;1(z) = f;0(z)) og derfor at f;1=f;0. Det følger at f;0 er entydig bestemt. Dette avslutter beviset for Teorem 15. **QED.**

Helt tilslutt i §8 i Del I oppførte vi det følgende teorem:

Teorem 16 (E;1) (a) Anta nê(N-{ø}) & zêD^n og at At;n(x). Da gjelder:
Neg(p;n(x)‘z) = u(Neg;(a,n)(x),z)

(b) Anta at M(x) & x Inkl A;n & zêD^n & nê(N-{ø}). Da gjelder:
SNu(Mg(p;n(y)‘z: yêx)) = u(Kon;(a,n)(x), z)

Bevis: (a) Anta forutsetningene i teoremet holder og at wêI. Da har man:

True(w,Neg(p;n(x)(z)) <–> ¬ True(w, p;n(x)(z)
<–> ¬True(w, (dz'êD^n)(u(z',x))(z))
<–> ¬True(w, u(z,x))
<–> ¬H(z,x,w)
<–> H(z,Neg;(a,n)(x),w)
<–> True(w, u(z,Neg;(a,n)(x)))

Fra dette følger punkt (a).

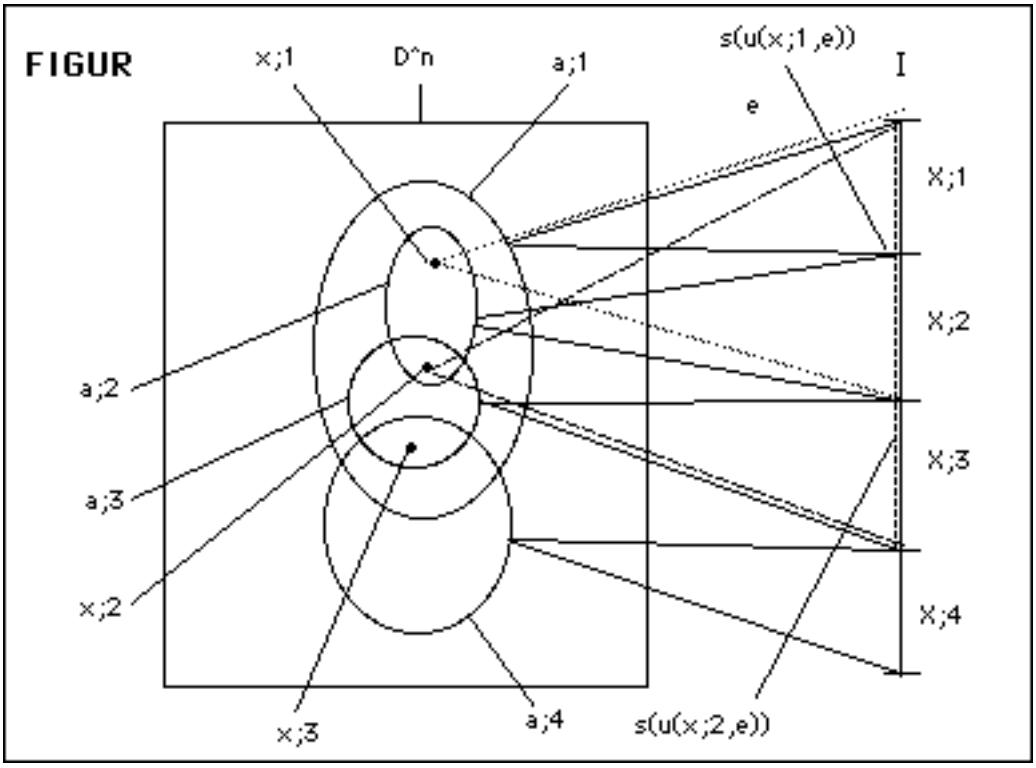
(b) Anta M(x) & x Inkl A;n & zêD^n & nê(N-{ø}). Da har man:
True(w, SNu(Mg(p;n(y)‘z: yêx)) <–> (Ar)(rêx –> True(w, p;n(r)(z))

<–> (Ar)(rêx –> True(w, u(z,r))
<–> (Ar)(rêx –> H(z,r,w))
<–> H(z, Kon;(a,n)(x),w)
<–> True(w, u(z, Kon;(a,n)(x)))

for alle wêI. Dette viser at satsen holder. **QED.**

§8.1 En figur.

For å illustrere forholdet mellom egenskapen e og instansene til denne egenskapen, u(z,e) for de diverse zêD^n (eêA;n og n≥1) gir vi følgende figur:



Figuren er ment å skulle anskueliggjøre en helt spesiell egenskap, men den kan også tjene til å illustrere forholdet mellom egenskaper og deres instanser mer generelt. Punktene innenfor kvadratet til venstre på figuren er det meningen at skal representere de enkelte elementene i D^n, slik at kvadratet selv representerer mengden D^n. Punktene på det vertikale linjestykket til høyre skal representere mengden av alle mulige verdener. Som man ser er denne mengden inndelt i fire innbyrdes disjunkte mengder, X;1 –X;4, på figuren. Disse mengdene er slik at de samlet uttømmer I. Sirklene a;1 –a;4 representerer ekstensjonene til egenskapen e i de forskjellige verdenene. Mengden a;1 er ekstensjonen til egenskapen e i alle de verdenene som inngår i mengden X;1, og tilsvarende er a;j ekstensjonen til egenskapen e i alle de verdenene som inngår i mengden X;j (j=2 – 4). Selve ekstensjonsfunksjonen til

egenskapen e er anskueliggjort ved pilene som peker fra I over i D^n. Som man ser peker pilene fra den delen av linjestykket I som representerer verdenene i mengden X;1 mot a;1. Tilsvarende for X;2 – X;4. Dette antyder at man har

(Aw)(wêX;1 –> Ekst;w(e)=a;1)

og mer generelt at (Aw)(wêX;j –> Ekst;w(e)=a;j) for jê{1,...,4}. Punktene i D^n som er merket x;1 – x;3 representerer n-tupler av mulige individer som er med i D^n. Fra figuren ser man at mengden Av alle de mulige verdenene hvor x;1 er med i ekstensjonen til e er X;1UX;2. Denne delen av linjestykket er merket med en stiplet linje. Mengden av alle de verdenene hvor instansen av e med hensyn på x;1 er sann er da nøyaktig mengden X;1UX;2. Tilvarende ser man at mengden av alle de verdenene hvor x;2 er med i ekstensjonen til e utgjøres av X;1UX;2UX;3. Dette er derfor sannhetsmengden til det utsagn at x;2 har egenskapen e, dvs. at utsagnet u(x;1,e) er sant i nøyaktig de verdenene som inngår i denne mengden.

§9 Rigide egenskaper.

En rigid egenskap ble i §9 i Del I definert som en egenskap der ekstensjonsfunksjonen er konstant. Man kunne derfor kanskje ha kalt rigide egenskaper for egenskaper med konstant ekstensjonsfunksjon - eller enda kortere – for konstante egenskaper. Terminologien i dette arbeid av påvirket av Kripke som i sin bok "Naming and Necessity" kaller en singulær term for rigid om den har den samme referanse i alle mulige verdener. Imidlertid dreier det seg her selvfølgelig ikke om singulære termer, men om egenskaper. Det bør likevel bemerkes at hvis a er en singulær term med konstant referanse i alle mulige verdener vil det til a svare et helt bestemt rigid attributt, nemlig det rigide attributtet e;a hvor ekstensjonen i hver mulig verden w er mengden som inneholder referansen til termen a i denne verdenen w og absolutt ingen andre entiteter. Det er følgelig en viss sammenheng mellom det Kripke kaller rigide designatorer og det som her kalles for rigide egenskaper som gjør at den terminologien som her benyttes neppe kan kalles søkt eller vilkårlig.

Når det gjelder de teoremene i Del I som har med rigide egenskaper å gjøre skal det her først gis bevis for den følgende sats:

Teorem 17 (E;1) Anta xêA;n, zêD^n og at n≥1 der n er et naturlig tall. Da gjelder det følgende om x er en eller annen rigid egenskap:

(p;n(x))(z) = s;-1(I) v (p;n(x))(z) = s;-1(ø)

Kommentar: Man ser lett fra definisjonen av p;n at (p;n(x)(z) er u(z,x) under de forutsetningene som er angitt i teoremet. Nå er u(z,x) utsagnet at z har egenskapen x. Teoremet sier derfor at hvis x er en rigid egenskap og z er et eller annet n-tuple av mulige individer så er utsagnet at z har egenskapenx alltid enten det nødvendige (tautologiske) utsagn eller det kontrakdiktoriske utsagn.

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder. Fra definisjonen av en rigid egenskap følger det at det finnes en mengde a som er slik at:

(1) a Inkl D^n &(Aw)(wêI –> Ekst;w(x) =a)

Det er to muligheter: (i) zêa. Da har man i lys av (1) at:

(2) (Aw)(wêI –> Ekst;w(x) =a) Fra dette kan man slutte at:

(3) Mg(w: wêI & H(z,x,w)) = I

Det følger herav at u(z,x) = s;-1(Mg(w: wêI & H(z,x,w))) = s;-1(I) Nå har man:

(4) ((p;n)(x))(z) = ((drêD^n)(u(r,x)))(z) = u(z,x)

Det følger fra de to siste påstandene at (p;n(x))(z) = s;-1(I). Satsen holder derfor i dette tilfellet. (ii) ¬(zêa). Da har man åpenbart at zê(D^n-a). Det følger i så fall at (Aw)(wêI –> ¬(zêEkst;w(x)). Dette innebærer: ¬(Ew)(wêI & H(z,x,w)). Herav kan man så i sin tur slutte at: Mg(w: wêI & H(z,x,w)) = ø. Man har derfor:

(p;n)(z) = u(z,x) = s;-1(Mg(w: wêI & H(z,x,w))) = s;-1(ø)

Dette viser at satsen også holder om ¬(zêa). Dette avslutter beviset. **QED.**

Teorem 18 (E;1) Anta xêA;n, zêD^n og at n≥1 der n er et naturlig tall. Anta videre at x er en rigid egenskap. Da gjelder:

(Ew)(wêI & H(z,x,w)) –> (Aw)(wêI –> H(z,x,w))

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Siden x er en rigid egenskap finnes det noe a der man har:

(1) M(a) & a Inkl D^n & (Aw)(wêI –> Ekst;w(x) =a)

Anta w;0êI & H(z,x,w;0) for en eller annen verden w;0êI. I så fall har man: zêEkst;(w;0)(x). Det følger da ved hjelp av (1) at (Aw)(wêI –> Ekst;w(x)). Dette impliserer i sin tur: (Aw)(wêI –> H(z,x,w)). **QED.**

§10 Den relative konsistens til teorien E;1 sett i relasjon til ZFCu(L;e)

I §10 i Del I ble det definert en avbildning : I;0 : L;e[Δ] –> L;e[Δ;0]. Denne funksjonen er en intepretasjon av L;e[Δ] inn i L;[Δ;0] som er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene. (Uttrykket "normal intepretasjon" ble definert presist i Rognes "En teori om presise deskriptive utsagn", §4.1)

Det følgende teorem er viktig:

Teorem 17 Følgende gjelder for alle P:

PêFm(L;e[Δ]) & PêTh(E;1) –> I;0(P)ê Th(T;1)

Som man ser uttrykker denne satsen at avbildningen I;0 overfører alle teoremene i E;1 til teoremer i T;1.

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på mengden av teoremer i E;1. Dette innebærer at man må vise, i det man forutsetter P,QêFm(L;e[Δ]), at I;0(P) er et teorem i ET;1 om P er et aksiom i E;1 og at I;0(Q) og I;0((Ax)P) er teoremer i T;1 om I;0(p) og I;0(P–>Q) er det. Det siste er temmelig opplagt siden Th(T;1) er lukket under modus ponens og universell generalisering. Det første bevises ved at man undersøker alle aksiomene i E;1. Bevisteknikken er som man forstår svært enkel og forøvrig den samme som den teknikk som ble benyttet ved beviset for Teorem 0.1 - 0.3 i §0.

Det er hensiktsmessig å gi definisjonen av I;0 på dette punkt. I;0 er den intepretasjonen av L;e[Δ] inn i L;e[Δ;0] som er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene og som dessuten oppfyller de følgende krav:

(i) I;0(MV(x)) = (MV(x))
(ii) I;0(Ut(x)) = (Ut(x))
(iii) I;0(True(w,x)) = (True(w,x))
(iv) I;0(At;n(x)) = (nê(N-{ø}) & xêExp(Pt(N^n),I)
(v) I;0(MI(x)) = (xêN)

(vi) $I;0(H(x,y,w)) = (MV(w) \& (En)(n\hat{e}(N\text{-}\{ø\}) \& y\hat{e}Exp(Pt(N\hat{}n),I)) \& x\hat{e}y(w))$

Nå ser man ganske lett at hvis P er et logisk aksiom eller et mengde-teoretisk aksiom i L;e[Δ] at I;0(P) er et teorem i T;1. (Faktisk i ZFCu(L;e[Δ;0])). Videre skulle det heller ikke være noen vanskeligheter forbundet med å innse at I;0(P) er et teorem i T;1 om P er et av de utsagnsteoretiske aksiomene: U1 – U4. Det er derfor tilstrekkelig å vise at I;0(P) er et teorem i T;1 om P er et av aksiomene A1 – A11. Imidlertid er ikke nødvendig å undersøke A10 siden dette aksiomet kan utledes ved hjelp av A11.

(i) Man har at I;0(A7) blir den følgende formel:

(1) $I;0(At;n(y;1)) \& I;0(At;n(y;2) \& n\hat{e}(N\text{-}\{ø\}) \& (Aw)(w\hat{e}I \text{ –>} (Ax)(I;0(H(x,y;1,w)) \text{ <–> } I;0(H(x,y;2,w)))) \text{ –> } y;1=y;2$

Det er nødvendig å vise at (1) er et teorem i T;1. Anta for reduktio ad absurdum at antesedenten i (1) holder og at (2) $y;1 \neq y;2$. Fra de to første konjunktene i antesedenten og definisjonen av I;0 har man

(3) $n\hat{e}(N\text{-}\{ø\}) \& y;1,y;2\hat{e}Exp(Pt(N\hat{}n),I)$

Fra dette og (2) følger det at det må finnes en verden w der

(4) $w\hat{e}I \& (y;1)(w) \neq (y;2)(w)$

Dette innebærer at det finnes noe z der man enten har $z\hat{e}(y;1)(w) \& \neg(z\hat{e}(y;2)(w))$ eller omvendt. Her studeres bare det første tilfellet. Anta:

(5) $z\hat{e}N\hat{}n \& z\hat{e}(y;1)(w) \& \neg(z\hat{e}(y;2)(w))$

Fra (4) og antesedenten i (1) følger:

(6) $(Ax)(I;0(H(x,y;1,w)) \text{ <–> } I;0(H(x,y;2,w)))$

Fra formlene (3), (4) og (5) og definisjonen av I;0 følger $I;0(H(z,y;1,w))$ som sammen med (6) gir en $I;0(H(z,y;2,w))$. Fra dette og definisjonen av I;0 følger så $z\hat{e}(y;2)(w)$ som strider mot (5). Det andre tilfellet blir helt analogt.

(ii) Når det gjelde A8 ser man at I;0(A8) blir den følgende formel i L;e[Δ;0]:

(1) $I;0(At;n(x)) \text{ –> } (Ey)(I,0(At;n(y)) \& (Az)Aw)(z\hat{e}N\hat{}n \& w\hat{e}I \text{ –> } (I;0(H(z,y:1,w)) \text{ <–> } \neg I;0(H(z,x,w)))))$

Anta derfor (2) $I;0(At;n(x))$. Fra dette og definisjonen av I;0 har man:

(2) $n\hat{e}(N\text{-}\{ø\}) \& x\hat{e}Exp(Pt(N\hat{}n),I)$

Definer nå objektet y ved $y(w) = (N\hat{}n\text{-}x(w))$ for alle wêI. Da ser man lett at (4) $y\hat{e}\ Exp(Pt(N\hat{}n),I) \& n\hat{e}(N\text{-}\{ø\})$. Fra (4) og definisjonen av I;0 følger (5) $I;0(At;n(y))$. Anta for vilkårlige objekter z og w at (6) $z\hat{e}N\hat{}n \& w\hat{e}I$. Anta videre at (7) $I;0(H(z,y,w))$. Fra (7) og definisjonen av I;0 følger (8) $z\hat{e}y(w)$. Fra dette og definisjonen av y har man (9) $\neg(z\hat{e}y(w))$. Dette og definisjonen av I;0 impliserer så (10) $\neg I;0(H(z,x,w))$. Dette viser at man har:

(11) $I;0(H(z,y,w)) \text{ –> } \neg I;0(H(z,x,w))$

Anta på den annen side at (12) $\neg I;0(H(z,x,w))$. Fra (3), (6) og definisjonen av I;0 følger i så tilfelle at (13) $\neg(z\hat{e}x(w))$. Fra dette, (6) og definisjonen av y har man så $z\hat{e}y(w)$ som sammen med (4) og (6) impliserer $I;0(H(z,y,w))$. Dette viser at også implikasjonen den andre veien i (11) holder. Men z og w var vilkårlige entiteter der (6) holdt. Man har derfor:

$(Az)Aw)(z\hat{e}N\hat{}n \& w\hat{e}I \text{ –> } (I;0(H(z,y:1,w)) \text{ <–> } \neg I;0(H(z,x,w))))$

Dette sammen med (5) gir en det man ønsker.

(iii) Det er nødvendig å vise at også I,0(A9), det vil si den følgende formel, er et teorem i T;1:

(1) $M(a) \& (Ax)(x\hat{e}a \text{ –> } I;0(At;n(x))) \& n\hat{e}(N\text{-}\{ø\}) \text{ –> } (Ey)(I;0(At;n(y)) \& (Az)(Aw)(z\hat{e}N\hat{}n \& w\hat{e}I \text{ –> } (I;0(H(z,y,w)) \text{ <–> } (Ax)(x\hat{e}a \text{ –> } I;0(H(z,x,w))))))$

I det vesentlige vil beviset nå bli ført etter det samme mønster som i forbindelse med A8. Anta (2) M(a) & (Ax)(xêa –> I;0(At;n(x))) & nê(N-{ø}). Fra (2) følger ved hjelp av definisjonen av I;0 at (3) (Ax)(xêa –> xêExp(Pt(N^n),I)). Definer nå y ved: (4) y(w) = N^nΩ SN/xêa/(x(w)) dersom wêI. Siden nê(N-{ø}) har man da:
(5) I;0(A;n(y)). (På dette punkt må man igjen konsultere definisjonen av I;0). Anta for vilkårlige objekter z,w at (6) zêN^n & wêI. Anta først:

(7) I;0(H(z,y,w)) & xêa. Fra dette og definisjonen av y følger zêN^n og at (Ax)(xêa –> zêx(w)). Fra dette og (7) har man så zêx(w) som sammen med (3), den siste delen av (2) og definisjonen av I;0 impliserer I;0(H(z,x,w)). Anta på den annen side at (Ax)(xêa –> I;0(H(z,x,w))). Fra dette følger ved hjelp av definisjonen av I;0 at (Ax)(xêa –> zêx(w)). Fra dette og (6) har man så:

zêN^nΩSN/xêa/(x(w)) og derfor, i lys av definisjonen av y at zêy(w). Ved hjelp av definisjonen I;0, (2), (4) og (6) impliserer dette I;0(H(z,y,w)). Siden z,w var vilkårlige entiteter som oppfylte kravet (6) kan man slutte:

(9) Az)(Aw)(zêN^n & wêI –>
(I;0(H(z,y,w)) <–> (Ax)(xêa –> I;0(H(z,x,w)))))

Fra (5) og (9) følger så konekventen i (1).

(iv) Man har at I;0(A11) er ekvivalent med:

(1) w;1,w;2êI & w;1≠w;2 & M(x) & x Inkl N^n & nê(N-{ø}) –>
(Ey)(Ez)(I;0(At;n(y)) & I;0(At;n(z)) &
(Ar)(rêx <–> I;0(H(r,y,w;1)) & (Ar)(rêx <–> I;0(H(r,z,w;1)) &
¬(Er)(I;0(H(r,y,w;2) & I;0(H(r,z,w;2))))

Det er altså tilstrekkelig å vise at (1) er et teorem i T;1. Anta derfor at:

(2) w;1,w;2êI & w;1≠w;2 & M(x) & x Inkl N^n & nê(N-{ø})

Definer en funksjon yêExp(Pt(N^n),I) ved

(3) y(w;1)=x & y(w;2)=N^n & y(w) = ø om wê(I-{w;1,w;2})

Definer videre en funksjon zêExp(Pt(N^n),I) ved:

(4) z(w;1) = x & (Aw)(wê(I -{w;1}) –> z(w) =ø)

Det er da nokså lett å vise at y og z definert på denne måten oppfyller kravene som er nevnt i konsekventen i (1). Fra definisjonene av y og z og det forhold at nê(N-{ø}) fremgår at man må ha: (5) I;0(At;n(y)) & I;0(At;n(z)). Anta rêx for vilkårlig r. da har vi rêy(w;1) i lys av (3). Siden yêExp(Pt(N^n),I) & nê(N-{ø}) følger at I;0(H(r,y,w;1)). Man ser også at det omvendte holder i kraft av (3). Det følger at (Ar)(rêx <–> I;0(H(r,y,w;1)). På tilsvarende vis innser man:

(Ar)(rêx <–> I;0(H(r,z,w;1)). Anta tilslutt for reduktio ad absurdum at det finnes r der man har at: I;0(H(r,y,w;2)) & I;0(H(r,z,w;2)). Fra definisjonen av I;0 følger da rêy(w;2) & rêz(w;2). Men fra (3) og (4) fremgår det i så fall at
rêN^n & rêø. Dette er klart umulig. Det følger at:

¬(Er)(I;0(H(r,y,w;2) & I;0(H(r,z,w;2)))

Dette viser at konsekventen i (1) holder og derfor at I;0(A11) er et teorem i T;1. Dette avslutter beviset for Teorem 19. **QED.**

På de neste sidene vil det bli gitt bevis for de satsene som er oppført som Teorem 20 - Teorem 27 i Del I.

Teorem 20 Hvis P en vilkårlig formel der PêFm(L;e[Δ;0]) har man I;0(P)=P

Bevis: Fra konstruksjonen av I;0 ser man at:

I;0(M(x)) = M(x)

I;0(x=y) = (x=y)
I;0(xêy) = (xêy)
I;0(MV(x)) = MV(x)
I;0(True(w,x)) = (True(w,x))
I;0(Ut(x)) = (Ut(x))

Siden dette er de primitive predikatene i L;e[Δ;0] og I;0 er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene (Jmf. definisjonen av "normal intepretasjon" gitt i Rognes "En teori om presise deskriptive utsagn", §4.1) har vi at Res(I;0, Fm(L;e[Δ;0])) er identisk med identitetsavbildningen over Fm(L;e[Δ;0]). Fra dette følger så Teorem 20. **QED.**

Teorem 21 Th(T;1) Inkl Th(E;1)

Bevis: Også dette teoremet er som det foregående i det vesentlige en helt triviell sats. Siden Th(E;1) er lukket under modus ponens og universell generalisering er det nok å vise at aksiomene i T;1 er inkludert i mengden av aksiomer i E;1. Man ser imidlertid umiddelbart at dette gjelder de logiske og mengdeteoretiske aksiomene i T;1. Det gjelder også aksiomene U1 – U4 som utgjør kjernen i T;1. Siden disse aksiomene også er aksiomer i E;1 må selvfølgelig påstanden holde. **QED.**

Teorem 22 Th(E;1) Ω Fm(L;e[Δ;0]) = Th(T;1)

Bevis: (a) Anta PêTh(E;1) & PêFm(L;e[Δ;0]). Da har man PêFm(L;e[Δ;0]) og derfor i lys av Teorem 19 at I;0(P)êTh(T,1). Men siden PêFm(L;e[Δ;0]) har vi ved hjelp av Teorem 21 at P=I;0(P)êTh(T,1). Dette viser at inklusjonen mot høyre holder. (b) Inklusjonen mot venstre følger umiddelbart fra Teorem 21 siden Th(T;1) Inkl Fm(L;e[Δ;0]). **QED.**

Teorem 23 E;1 er konsistent hvis og bare hvis T;1 er konsistent.

Bevis: (a) Vi viser først kondisjonalen mot høyre. Anta T;1 er inkonsistent. Da finnes det en formel Q der QêFm(L;e[Δ;0]) og hvor (Q&¬Q)êTh(T;1). Fra dette og Teorem 21 følger (Q&¬Q)êTh(E;1). Dette impliserer at E;1 er inkonsistent.
(b) Når det gjelder kondisjonalen mot venstre kan man først anta at E;1 er inkonsistent. Da finnes QêFm(L;e[Δ]) der (Q&¬Q)êTh(E;1). Ved hjelp av Teorem 19 følger da: I;0(Q&¬Q)êTh(T;1). Videre har man i lys av konstruksjonen av I;0 at: I;0(Q&¬Q) = I;0(Q) &¬I;0(Q). Siden R=I,0(Q)êFm(L;e[Δ;0]) følger:

(ER)(RêFm(L;e[Δ;0]) & (R&¬R)êTh(T;1)).

Dette innebærer åpenbart at T;1 er inkonsistent. **QED.**

Teorem 24 E;1 er konsistent relativt ZFCu(L;e) (ZFC)

Bevis: Fra Rognes "En teori om presise deskriptive utsagn" går det frem at teorien T;1 er konsistent relativt til ZFCu(L;e). Denne teori er i sin tur konsistent relativt til ZFC. Fra dette og Teorem 23 følger umiddelbart påstanden. **QED.**

Teorem 25 (i) E;1 er en konservativ utvidelse av T;1
(ii) E;1 er en konservativ utvidelse av ZFCu(L;e)

Bevis: (i) At E;1 er en konservativ utvidelse av T;1 innebærer at enhver formel i språket til T;1 (ie. L;e[Δ;0]) som er et teorem i E;1 allerede er et teorem i T;1. Dette følger umiddelbart fra Teorem 22. (ii) Nå ble det vist i Rognes "En teori om presise deskriptive utsagn" at:

(1) PêFm(L,e) & PêTh(T,1) –> PêTh(ZFCu(L,e))

Anta nå at (2) PêFm(L:e) & PêTh(E;1). Da har man PêFm(L;e[Δ;0]) og derfor i lys av Teorem 23 at (3) PêTh(T;1). Men fra (1) – (3) følger at PêTh(ZFCu(L;e)). Det har derfor blitt bevist at:

(AP)(PêFm(L;e) & PêTh(E;1) –> PêTh(ZFCu(L,e))

Det følger herav fra defiisjonen av konservativ utvidelse at E;1 er en slik utvidelse av ZFCu(L;e). **QED.**

Dette teoremet viser at når vi legger til akiomene U1 – U4, A1 – A11 endrer vi ikke noe på de rent mengdeteoretiske setningene i systemet ZFCu(L;e). Disse aksiomene utgjør derfor fra en ren mengdeteoretisk synsvinkel et temmelig harmløst tillegg.
Konsistensteoremet ovenfor viser også at man ikke på et rent formelt logisk grunnlag kan vse at E;1 er uriktig.

Teorem 26 (i) Th(E;1) Inkl Th(E;2)
(ii) Th(E;1) = Th(E;2)
(iii) E;2 er en konservativ utvidelse av T;1 og ZFCu(L;e)
(iv) E;2 er konsistent relativt til T;1 og ZFCu(L;e)

Bevis: Det bemerkes først at punkt (ii) følger fra (i) og Teorem 13. Punkt (iii) og (iv) følger så fra (ii) og Teorem 23 – 25. Det er derfor tilstrekkelig å vise at (i) holder. For dette formål er det i sin tur tilstrekkelig å vise at A8 – A11 kan utledes i E;2. Dette er ikke spesielt vanskelig:

(a) Anta At;n(x) i det det forutsettes at nê(N-{ø}). Sett per definisjon f=Mg(<w,Ekst;w(x)>: wêI). Det er da lett å se at f er en funksjon og at fêExp(Pt(D^n),I). Definer f* ved f*(w)= (D^n - Ekst;w(x)) for wêI. Da har man at f*êExp(D^n,I) og i lys av A12 følger det i så fall at det finnes y der man har:

At;n(y) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y) = f*)

Herav har man : At;n(y) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y) = D^n – Ekst;w(x)).
Fra dette utleder man imidlertid lett konsekventen i A8.

(b) Anta M(a) & a Inkl A;n & nê(N-{ø}). Anta a=ø. Definer i så fall en ekstensjonsfunksjon g ved g(w) =D^n for alle wêI. Man har da at gêExp(D^n,I) og ved hjelp av A12 er det da berettiget å slutte at det finnes noe y der:

(+) At;n(y) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y) =g(w)). Anta for vilkårlige w og z at wêI og zêD^n. Siden a=ø har man H(z,y,w) –> (Ax)(xêa –> H(z,x,w)). Har man på den annen side at wêI & zêD^n & (Ax)(xêa –> H(z,x,w)) følger fra definisjonen av g og (+) at Ekst;w(y)=D^n. Dette innebærer at zêD^n=Ekst;w(y) og derfor at H(z,y,w). Man har altså i dette tilfelle at:

(Aw)(Az)((wêI & zêD^n)–> (H(z,y,w) <–> (Ax)(xêa –> H(z,x,w))))

Dette sammen med første konjunkt i (+) gir en så konsekventen i A9.

Er a≠ø defineres for hver xêa en funksjon f(x) ved:

(1) f(x) = Mg(<w, Ekst;w(x)>: wêI)

Det er da lett å vise i E;2 at (2) (Ax)(xêa –> f(x)êExp(Pt(D^n),I)). Definer så en funksjon g ved (3) g(w)= D^nΩ SN(xêa/(f(x)‘w) om wêI. Man innser uten vanskeligheter at gêExp(Pt(D^n),I) og fra A12 følger da eksistensen av y der man har: (4) At;n(y) & (Aw) (wêI –> Ekst;w(y) = g(w)). Herav følger i lys av (3) at:

(5) At;n(y) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y) = D^nΩ SN/xêa/(Ekst;w(x)))

Fra dette følger imidlertid lett konsekventen i A9.

Det er ikke nødvendig å utlede A10 siden dette aksiomet følger fra A11.

(c) Det er imidlertid nødvendig å gi bevis for at A11 kan utledes i E;2. Anta derfor:

(1) w;1,w;2êI & w;1≠w;2 & nê(N-{ø})

Anta dessuten at M(x) & x Inkl D^n. Definer to funksjoner f;1 og f;2 ved:

(2) f;1(w;1)=x & f;1(w;2)=D^n & (Aw)(wê(I-{w;1,w;2}) –> f;1(w))

(3) f;2(w;1)=x & (Aw)(wêI –> f;2(w)=ø)

(4) f;1,f;2êExp(PT(D^n),I)

Det er lett å vise i E;2 at to slike funksjoner eksisterer. Fra A12 følger nå eksistensen av y og z slik at:

(5) At;n(y) & At;n(z) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y)=f;1) &
(Aw)(wêI –> Ekst;w(z) =f;2)

Fra (5) og (2) – (4) følger Ekst;(w;1)(y) = Ekst;(w;1)(z) =x og dessuten at Ekst;(w;2)(y) Ω Ekst;(w;2)(z) =ø. Dette viser at A11 kan utledes i E;2.

Dette avslutter beviset for Teorem 26. **QED.**

Teorem 27 (i) I;0(S;2)êTh(T;1)
(ii) (AP)(PêFm(L;e[Δ]) & PêTh(E;1[S;1]) –> I;0(P)êTh(T;1))
(iii) E;1[S;2] er konsistent relativt til T;1

Kommentar: Før vi gir bevis for denne setningen bemerker vi at S;2 er den følgende formel i L;e[Δ]:

(An)(Am)(m,nê(N-{ø}) & m≠n –> Ø;n = Ø;m)

Her er Ø;n, nullattributtet av grad n definert ved:

Ø;n = (ix)(At;n(x) & ¬(Ew)(Ey)(H(y,x,w))) der nê(N-{ø})

Bevis: Punkt (ii) i teoremet følger lett ved hjelp av (i) og Teorem 19. Punkt (iii) følger så ved hjelp av punkt (ii). Det er derfor helt tilstrekkelig å vis at det første punktet i teoremet holder. Merk forøvrig atI;0 er den intepretasjonen Av L;e[Δ;] inn i L;e[Δ;0] som bløe definert i forbindelse medbeviset for Teorem 19. Man ser også lett at hvis S;2 skrives ut i primitiv notasjon får man en formel som er ekvivalent med den følgende:

(S;2') (Am)(An)(m,nê(N-{ø}) & m≠n –>
(Ey;1)(Ey;2)(y;1 = y;2 & (Ax)((At;m(x) & ¬(Ez)(w)(H(z,x,w)) –> x=y;1)
& (Ax)((At;n(x) & ¬(Ez)(w)(H(z,x,w)) –> x=y;2))

Det er forøvrig lett å vise at I;0(S;2)êTh(T;1) hvis og bare hvis I;0(S;2')êTh(T;1). Det er derfor nok å vise at det siste holder. Nå har man at I;0(S;2') er ekvivalent med den følgende formel:

(1) (Am)(An)((m,nê(N-{ø}) & m≠n) –>
(Ey)((Ax)(I;0(At;n(x) & ¬(Ez)(Ew)(I;0(H(z,x,w)) <–> x=y) &
(Ax)(I;0(At;m(x) & ¬(Ez)(Ew)(I;0(H(z,x,w)) <–> x=y)))

Det er derfor tilstrekkelig å vise at (1) er et teorem i T;1. Anta følgelig at
(2) m,nê(N-{ø} & m≠n for vilkårlige m og n. Definer funksjonen f;0 ved:

(3) f;0 = Mg(<w,ø>: wêI). Da har vi M(f;0) & f;0êExp(Pt(D^n),I). Det ville derfor være tilstrekkelig om man nå kunne bevise de følgende to ting:

(4) (Ax)(I;0(At;m(x) & ¬(Ez)(Ew)(I;0(H(z,x,w)) <–> x=f;0) og

(5) (Ax)(I;0(At;n(x) & ¬(Ez)(Ew)(I;0(H(z,x,w)) <–> x=f;0)

Det gis her bare et bevis for formelen (4) siden bevis for at (5) holder føres på en måte som helt analog.

(a) Først bevises kondisjonalen mot høyre i (4): Anta for vilkårlig x at (6) I;0(At;m(x)) og (7) ¬(Ez)(Ew)(I;0(H(z,x,w)). Fra (6) og definisjonen av I;0 følger nå at (8) xêExp(Pt(N^m),I) & nê(n-{ø}). Fra (7) og definisjonen av I;0 følger:

(9) (Aw)(Az)((wêI & (En)(nê(N-{ø}) & xêExp(Pt(N^n),I)) –> ¬zêx(w))

Fra (8) og (9) følger (10) (Aw)(Az)(wêI –> ¬(zêx(w))) og derfor

(11) (Aw)(wêI –> ¬(Ez)(zêx(w))). Dette innebærer at man har:

(Aw)(wêI –> x(w)=ø). Fra (8) følger imidlertid at Func(x) & Dom(x)=I. Fra dette, (11) og definisjonen av f;0 kan man derfor slutte at x=f;0.

(b) Anta på den annen side at (12) x=f;0. Da har vi i lys av definisjonen av f;0 at xêExp(Pt(N^n),I). Det følger at I;0(At;m(x)). Det er også klart at (9) ovenfor følger fra (12) og definisjonen av f;0. Man har derfor også ¬(Ez)(Ew)(I;0(H(z,x,w)). Men x var et vilkårlig objekt. Dette viser at også kondisjonalen mot venstre i (4) lar seg utlede. Dette avslutter vårt bevis for Teorem 27. **QED.**

Tidligere ble intepretasjonen I;0 av L;e[Δ] inn i L;e[Δ;0] betraktet. Vi betrakter nå den følgende intepretasjon, I;1, av L;e[Δ] inn i L;e[Δ;0] som er normal mhp. de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene. Den skal dessuten oppfylle de følgende krav:

(i) I;1(MV(x)) = (MV(x))
(ii) I;1(Ut(x)) = (Ut(x))
(iii) I;1(True(w,x)) = (True(w,x))
(iv) I;1(At;n(x)) = (nê(N-{ø}) & xêExp(2^I, N^n)
(v) I;1(MI(x)) = (xêN)
(vi) I;1(H(x,y,w)) = (MV(w) & (En)(nê(N-{ø}) & yêExp(2^I, N^n)) & xêDom(y) & y(x)‘w=1)

Det teorem som det nå vil bli gitt et bevis for er:

Teorem 28 (i) I;1"(Th(E;1)) Inkl Th(T;1)
(ii) I;1(S;1) êTh(T;1)
(iii) I;1"(Th(E;1[S;1])) inkl Th(T;1)
(iv) E;1[S;1] er konsistent relativt til T;1

Bevis: Det bemerkes først at punkt (iii) og (iv) i dette teoremet er enkle korollarer til punkt (i) og (ii).

(i) Det er temmelig enkelt å bevise at I;1 avbilder de logiske, mengdeteoretiske og utsagnsteoretiske aksiomene i E;1 på teoremer i T;1. Dette fremgår delvis av det faktum at Res(I;1, Fm(L;e[Δ;0])) er identitetsavbildningen over Fm(L;e[Δ;0]). Det er også lett å se at I;1(P)êTh(T;1) om P er et av aksiomene A1 - A6. Den detaljerte verifikasjon av dette utelates siden det er fullstendig trivielt rutinearbeid. Det er videre ikke vanskelig å vise at I;1((Ax)P)êTh(T,1) og I;1(Q)êTh(T;1) om I;1(P) og I;1(P–>Q) er det. Det eneste som derfor

er nødvendig er å gi mer detaljerte bevis for at I;1(A7) – I;1(A11) er teoremer i T;1. Beviset for dette vil imidlertid i hovedtrekkene være som ved beviset for Teorem 19, men med den forskjell at man nå må arbeide med funksjonene i mengden
Exp(2^I, N^n) istedet for med dem i Exp(Pt(N^n),I).

(a) Vi ser først på A7. Man har at I;1(A7) er ekvivalent med :

(1) I;1(At;n(x)) & I;1(At;n(y)) &
(Aw)(wêI –> (Az)(I;1(H(z,x,w)) <–> I;1(H(z,y,w)))). –> x=y

Fra de to første konjunktene i antesedenten i (1) følger i lys av definisjonen av I;1 at: (2) nê(N-{ø}) & xêExp(2^I,N^n) & yêExp(2^I,N^n). Anta nå for reduktio ad absurdum at x≠y. Da finnes det i lys av (2) en z der man har

(3) zêN^n & x(z)≠y(z)

Fra det siste følger det, siden x(z),y(z)ê2^I ,at det må finnes en entitet w der man har: (4) wêI og dessuten (5) x(z)‘w ≠ y(z)‘w. Siden x(z)‘wê{0,1} er det to muligheter. Vi ser bare på det ene tilfellet siden det andre behandles på akkurat den samme måten.

Tilfelle (a): (6) x(z)‘w=1. Fra (4) og den siste konjunkten i antesedenten i (1) følger i dette tilfellet:

(7) (Az)(I;1(H(z,x,w)) <–> I;1(H(z,y,w)))

Fra (2), (3), (4) og (6) følger:

(8) wêI & (En)(nê(N-{ø}) & xêExp(2^I, N^n) &
zêDom(x)=N^n) & z(x)‘w=1

Fra (8) og definisjonen av I;1 følger I;1(H(z,x,w)) som sammen med (7) impliserer I;1(H(z,y,w)). Men fra dette og definisjonen av I;1 følger y(z)‘w=1. Men sammen med (6) strider dette mot (5). *Tilfelle (b):* x(z)‘w=0. Da må i lys av (5) og (2): y(z)‘w=0 og vi kan da gå frem som under tilfelle (a), men med den forskjell at vi nå betrakter y istedet for x.

Det har nå blitt bevist at (1) kan utledes i T;1 og derfor at I;1(A7)êTh(T;1).

(b) I;1(A8) er ekvivalent med den følgende formel:

(1) I;1(At;n(x)) –> (Ey)(I;1(At;n(y)) &
(Az)(Aw)(zêN^n &wêI –> (I;1(H(z,y,w)) <–> ¬I;1(H(z,x,w)))))

Anta (2) I;1(At;n(x)). Fra dette og definisjonen av I;1 følger:

(3) nê(N-{ø}) & xêExp(2^I,N^n)

Definer en funksjon fêExp(2^I,N^n) ved:

(+) f(z)‘w=1 <–> x(z)‘w=0 for alle zêN^n og wêI.

Man kan på grunnlag av de mengdeteoretiske aksiomene vise at en slik funksjon eksisterer. I lys av definisjonen av I;1 har man (4) I;1(At;n(f)). Anta for vilkårlige z,w at (5) zêN^n & wêI.

(A) Anta (6) ¬I;1(H(z,x,w)). Fra definisjonen av I,1 kan man da slutte:

(7) MV(w) & (En)(nê(N-{ø}) & xêExp(2^I,N^n)) &
zêDom(x) –> x(z)‘w =0

Fra (3) og (5) følger at antesedenten i den andre konjunkten i (7) holder. Vi har derfor at x(z)‘w=0. Dette sammen med (+) gir en: f(z)‘w = 1. Herav følger så ved hjelp av (5), definisjonen av f og definisjonen av I;1 at I;1(H(z,f,w)).

(B) Anta på den annen side – for reduktio ad absurdum – at I;1(H(z,f,w)) & I;1(H(z,x,w)). Ved hjelp av definisjonen av I;1 følger i så fall f(z)‘w = 1 = x(z)‘w. Dette strider imidlertid mot (+).

Fra (A) og (B) fremgår det at man har I;1(H(z,f,w)) <–> ¬ I;1(H(z,x,w)). Siden z,w var vilkårlige objekter må man også ha:

(Az)(Aw)(zêN^n&wêI –>(I;1(H(z,f,w)) <–> ¬ I;1(H(z,x,w)))).

Dette sammen med (4) viser at konsekventen i (1) holder. Dette avslutter vårt bevis for at I;1(A8) er et teorem i T;1.

Av plasshensyn overlater vi det til leseren å gi bevis for at I;1(A9) og I;1(A11) er teoremer i T;1. Dette kan gjøres med beviset for Teorem 19 som forbilde. I denne forbindelse bemerkes det også at man kan sløyfe verifikasjonen av A10, siden dette aksiomet følger fra A11 i nærvær av de andre aksiomene i E;1.

(c) S;1 er den følgende setning i L;e[Δ]:

(+) (Am)(An)(m,nê(N-{ø}) –> Ø;m ≠ Ø;n)

Man ser nokså lett ved hjelp av definisjonen av "Ø;n" at denne formelen er ekvivalent med:

(1) (Am)(An)(m,nê(N-{ø}) –>
¬(Ey)(Ax([At;n(x) &¬(Ez)(Ew)(H(z,x,w))] <–> x=y) &
Ax([At;m(x) &¬(Ez)(Ew)(H(z,x,w))] <–> x=y)))

Det vil derfor være tilstrekkelig å vise at I;1((1)) er et teorem i T;1. Fra definisjonen av I;1 følger det da at det er tilstrekkelig å vise at det følgende er et teorem i T;1:

(2) (Am)(An)(m,nê(N-{ø}) –>
¬(Ey)(Ax([I;1(At;n(x)) &¬(Ez)(Ew)(I;1(H(z,x,w)))] <–> x=y) &
Ax([I;1(At;m(x)) &¬(Ez)(Ew)(I;1(H(z,x,w)))] <–> x=y)))

Vi viser først at det følgende holder i T;1 om mê(n-{ø}):

(3) (Ax)([I;1(At;m(x) &¬(Ez)(Ew)(I;1(H(z,x,w)))] <–>
x= Mg(<z,ø`(k,I)>: zêN^m))

(i) Først gis det et bevis forat kondisjonalen mot høyre i (3) holder. Anta derfor (4) I;1(At;m(x) &¬(Ez)(Ew)(I;1(H(z,x,w))). Da følger ved hjelp av definisjonen av I;1 at:

(5) mê(N-{ø}) & xêExp(2^I,N^m) og

(6) (Aw)(Az)(MV(w) & (Ej)(jê(N-{ø}) & xêExp(2^I,N^j) &
zêDom(x). –> x(z)‘w=0)

Fra (5) og (6) følger: (Aw)(Az)(wêI & zêDom(x) –> x(z)=ø`(k,I)). Men herav har man, siden xêExp(2^I, N^m), at x= Mg(<z,ø`(k,I)>: zêN^m).

(ii) Anta på den annen side at x= Mg(<z,ø`(k,I)>: zêN^m) & mê(N-{ø}). Da har man xêExp(2^I,N^m) og derfor at (8) I;1(At;m(x)). Det følger imidlertid også at (Aw)(Az)(wêI & zêDom(x) –> x(z)‘w=0). Fra dette følger i sin tur (6) dvs.

(9) ¬(Ew)(Ez)(I;1(H(z,x,w))). Dette Avslutter beviset for (3)

På en helt tilsvarende måte gir man bevis for:

(10) (Ax)([I;1(At;n(x) &¬(Ez)(Ew)(I;1(H(z,x,w)))] <–>
x= Mg(<z,ø`(k,I)>: zêN^n))

Er nå n,mê(N-{ø}) &n≠m har man at N^n≠N^m og derfor at

(11) Mg(<z,ø`(k,I)>: zêN^n) ≠ Mg(<z,ø`(k,I)>: zêN^m)

Fra (3), (4) og (11) følger så konsekventen i (2). Dette viser at I;1(S;1)êTh(T;1) og avslutter dermed beviset for Teorem 28. **QED.**

Som et korollar til Teorem 27 – Teorem 28 har man:

Teorem 29 (i) Er T;1 konsistent er hverken S;1 eller ¬S;1 noe teorem i E;1.
(ii) Det gjelder også under den samme forutsetning at hverken S;2 eller ¬S;2 er noe teorem i E;1

Bevis: (i) Det ble ovenfor i forbindelse med Teorem 28 bevist at E;1[S;2] er konsistent relativt til T;1. Siden (S;2–>¬S;1)êTh(E;1) følger det at E;1[¬S;1] er konsistent relativt til T;1. Det følger at S;1 ikke er noe teorem i E;1 for i så tilfelle ville E;1[¬S;1] være

inkonsistent og da ville T;1også være det. Det ble også bevist (Teorem 28) at E;1[S;1] er konsistent om T;1 er det. Hadde man da at (¬S;1)êTh(E;1) ville man ha (¬S;1)êTh(E;1[S;1]), og da selvfølgelig at (S;1&¬S;1)êTh(E;1[S;1]). Dette innebærer at E;1[S;1] i så fall ville være inkonsistent og dermed også at T;1 ville være det. Men forutsetningene i teoremet utelukker dette.

(ii) Siden vi har (¬S;2)êTh(E;1[S;1]) følger at E;1[¬S;2] er konsistent relativt til T;1 siden E;1[S;1] er det. (Konsulter i denne forbindelse Teorem 28) Det følger at hvis S;2êTh(E;1) ville E;1[S;1] være inkonsistent, men det er umulig. Anta på den annen side at (¬S;2)êTh(E;1). Da ville E;1[S;2] være inkonsistent, og i lys av Teorem 27 ville T;1 være inkonsistent. Dette er utelukket i lys av forutset-ningene i teoremet. **QED.**

Teoremet ovenfor viser at hvis T;1 er konsistent så er S;1 såvel som S;2 uavhengige av E;1. Siden T;1 er konsistent relativt til ZFCu(L;e) og denne teorien i sin tur er konsistent relativt til ZFC og dermed til ZF (Gødel) følger det at Teorem 29 fremdeles holder om man overalt erstatter "T;1" med enten "ZFCu(L,e)", "ZFC" eller ZF.

Teorem 30 Er P setningen "(Ex)(En)(nê(N-{ø}) &n≥2 & At;n(x) & At;1(x))"
og er T;1 konsistent så er hverken P eller ¬P noe teorem i E;1.

I forbindelse med denne satsen nevnes det også noen som innholdsmessig virker nær beslektet.

Teorem 30.1 Er Q setningen "(An)(Am)(n,m≥1 &n≠m –> A;nΩ A;m=ø)"
og er T;1 konsistent så er også E;1[Q] konsistent.

Fra Teorem 30 og Teorem 30.1 følger også den følgende sats.

Teorem 30.2 Er T;1 konsistent så er
Q="(An)(Am)(n,m≥1 &n≠m –> A;nΩ A;m=ø)"
uavhengig av E;1, dvs. at man har ¬(QêTh(E;1)) & ¬((¬Q)êTh(E;1))

Bevis for Teorem 30: I dette beviset forutsettes det at intepretasjonsfunksjonen I;0 som ble brukt i beviset for Teorem 30 defineres på en litt annen måte. I klausulene (iv) – (vi) erstatter man nå "N" overalt med "NU(N^2)". Den nye intepretasjonsfunksjonen som er definert på denne måten kalles for I;0+. Det er da lett å vise at I;0+‘‘Th(E;1) Inkl Th(T;1). Beviset blir nær sagt ord for ord som det for Teorem 19 bortsett fra at man overalt hvor det er spørsmål om mulige individer må erstatte "N" med "NU(N^2)". Definer e;0 ved:

e;0=Mg(<w,N^2>: wêI).

Da har man at e;0 er en mengde, mao. M(e;0), og at (Ey)(y=e;0) kan bevises på basis av de mengdeteoretiske aksiomene. Nå er det slik at:

I;0+(P) = (Ex)(En)(n≥2 & I;0+(At;n(x)) & I;0+(At;1(x)))

Fra definisjonen av I;0+ ser man at det vil være tilstrekkelig å bevise at det følgende holder for to entiteter z og y:

(1) y=2 & yê(N-{ø}) & e;0êExp(Pt((NU(N^2))^y),I)

(2) z=1 & zê(N-{ø}) & e;0êExp(Pt((NU(N^2))^z),I)

Når det gjelder (1) har man fra definisjonen av e;0 at

e;0(w) Inkl N^2 Inkl NU(N^2)

Det følger herav at e;0(w)êPt((NU(N^2))^2) og derfor e;0êExp(Pt((NU(N^2))^2,I). Siden det finnes y der y=2 & yê(N-{ø}) følger det at (1) holder.

Når det gjelder (2) har man på samme måte som rett ovenfor at e;0(w)=N^2 Inkl NU(N^2) om wêI. Derfor e;0êExp(Pt((NU(N^2))^1,I). Dette innebærer at (2) holder. Fra (1) og (2) følger det at I;0+(P) er et teorem i T;1. Fra dette følger: (3) I;0+‘‘Th(E;1[P]) Inkl Th(T;1)

Anta for reduktio ad absurdum at (¬P)êTh(E;1). Da har man åpenbart at PêTh(E;1[P]) & (¬P)êTh(E;1[P]). Dette innebærer at teorien E;1[P] er inkonsistent. Men fra dette og (3) følger at T;1 er inkonsistent. Er derfor T;1 konsistent kan man ikke ha at ¬P er noe teorem i E;1. Det er imidlertid også nødvendig å vise at P ikke er noe teorem i E;1 om T;1 er konsistent. Det er imidlertid lett å vise at

(4) (Q–>¬P)êTh(E;1). For anta Q holder. Da har man

(An)(Am)(n≥2 –> A;nΩ A;1=ø). Dette innebærer at

¬(Ex)(En)(n≥1 & At;n(x) & At;1(x)) mao. at ¬P. Fra Teorem 30.1 som bevises nedenfor følger at E;1[Q] er konsistent om T;1 er det. Anta nå at T;1 er konsistent og dessuten for reduktio ad absurdum at PêTh(E;1). Da har man at PêTh(E;1[Q]). Men i lys av (4) har man da også (¬P)êTh(E;1[Q]). Men i så fall følger (P&¬P)êTh(E;1[Q]). I lys av Teorem 30.1 må da T;1 være inkonsistent. Dette gir en åpenbart en motsigelse. **QED.**

Bevis for Teorem 30.1: I forbindelse med beviset for Teorem 28 ble det definert en avbildning I;1 og det ble vist at (1) I;1‘‘Th(E;1) Inkl Th(T;1). Det vil nå bli gitt et bevis for at (2) I;1(Q)êTh(T;1). Fra (1) og (2) følger teoremet. Det er derfor tilstrekkelig å bevise riktigheten av (2). Nå har man at I;1(Q) er ekvivalent med:

(3) (An)(Am)(n,m≥1 & n≠m –> ¬(Ex)(I;1(At;n(x)) & I;1(At;m(x))))

Anta (4) n,m≥1 & n≠m og anta for reduktio ad absurdum at det finnes et eller annet objekt x der man har (5) I;1(At;n(x)) & I;1(At;m(x)). Fra dette siste og definisjonen av I;1 følger:

(6) nê(N-{ø}) & xêExp(2^I,N^n) & mê(N-{ø}) & xêExp(2^I,N^m)

Fra dette følger at Dom(x)=N^n & Dom(x)=N^m. Herav N^n=N^m. Men dette er umulig om m≠n.

Bevis for Teorem 30.2: Anta T;1 er konsistent og anta for reduktio ad absurdum at (1) QêTh(E;1). Nå ble det bevist ovenfor at (Q->¬P)êTh(E;1). Dette innebærer at (2) (P–>¬Q)êTh(E;1). Fra (1) og (2) følger (Q&¬Q)êTh(E;1[P]). E;1[P] er i så fall inkonsistent. Nå ble det bevist ovenfor at I;1+‘‘(Th(E;1[P])) Inkl Th(T;1). Det følger derfor at T;1 er inkonsistent. Men i følge forutsetningene i teoremet er dette utelukket. Man kan altså konkludere med at ¬(QêTh(E;1)). Anta på den annen side for reduktio ad absurdum at T;1 er konsistent, og at (¬Q)êTh(E;1). Da har man (Q&¬Q)êTh(E;1[Q]). I så fall har man at E;1[Q] er inkonsistent. Men fra dette og Teorem 30.1 følger at T;1 er inkonsistent. Dette gir en imidlertid en motsigelse. **QED.**

I forbindelse med Teorem 30, Teorem 30.1 og Teorem 30.2 kan det også være av en viss interesse å bemerke følgende. La E;1+ være den teorien man får når A7 erstattes med den følgende, litt sterkere, formel:

A7+: At;n(x) & At;m(y) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(x) = Ekst;w(y)). –> x=y

Man ser lett at A7+ impliserer A7. Man kan også lett sjekke at intepretasjonen I;0 som ble brukt i beviset for Teorem 19 avbilder A7+ på et teorem i T;1. Det følger i så fall at man må ha:

Teorem 30.2	(a)	I;0‘‘Th(E;1+) Inkl Th(T;1)
	(b)	Er T;1 konsistent er E;1+ det også

Bevis: Dette ble antydet rett ovenfor. **QED.**

Vi går nå over til Teorem 31 i Del I. Dette er den følgende sats:

Teorem 31 Anta m,nê(N-{ø}) & n,m≥2 & n≠m. Da gjelder:
(+) (A;n-{Ø;n})Ω (A;m-{Ø;m) =ø

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder og anta for reduktio ad absurdum at det finnes noe x der:
(1) xê(A;n-{Ø;n)) & xê(A;m -{Ø;m))
Fra (1) og definisjonen av A;n følger: (2) At;n(x) & At;m(x). Videre følger (3) x≠Ø;n. Fra dette og definisjonen av Ø;n følger:
(4) ¬(x= (iy)(At;n(y) & ¬(Ez)(Ew)(H(z,y,w)))). Dette innebærer mao.:
(5) ¬((Ay)([At;n(y) & ¬(Ez)(Ew)(H(z,y,w))] <–> y=x))
Anta nå for reduktio ad absurdum at (6) ¬(Ez)(Ew)(H(z,x,w)). Fra (2) og (6) følger at (7) At;n(x) & ¬(Ez)(Ew)(H(z,x,w)). Fra (7) og A7 følger videre at x er entydig bestemt. Men dette strider mot (5). Man har derfro at det må finnes z;0 og w;0 der (8) H(z;0,x,w;0). Fra (2), (8) og A3 følger (9) z:0êD^n & z;0êD^m. Men ifølge forutsetningene er n≠m & n,m≥2. Da D^nΩD^m=ø. Dette strider mot (9). Det følger at (1) ikke holder for noe x. **QED.**

Teorem 32 (E;1) (i) D Inkl Ur –> (n>1 –> (A;n-{Ø;n))Ω (A;1-{Ø;1])=ø)
(ii) D Inkl Ur –> (Am)(An)((m,nê(N-{ø}) & m≠n) –>
(A;m-{Ø;m))Ω (A;n-{Ø;n])=ø)

Bevis: Det er tilstrekkelig å bevise punkt (ii) siden en lett innser at punkt (i) er en umiddelbar følge av punkt (ii).

Ad (ii). Anta (1) D Inkl Ur & m,nê(N-{ø}) & m≠n. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes x slik at (2) xê(A;m-{Ø;m}) & xê(A;n-{Ø;n}). Herav følger (3) At;m(x) & At;n(x). Det følger videre at (4) x=Ø;m. Herav utleder man på den samme måten som i det forrige beviset at det må finnes z;0 og w;0 der H(z;0,x,w;0). Fra dette, (3) og (5) følger z;0êD^m & z;0êD^n i lys av A3. Nå har man at (6) D^mΩD^n =ø om m,n≥2 & m≠n. (a) Anta nå at n=1. Da må man ha m≥2. Er da xêD^m har man at M(x) fordi x=<y;1,...,y;m> for noen y;1,...,y;mêUr. Men da kan ikke xêD Inkl Ur. For i så tilfelle har man ¬M(x). (6) holder derfor om n=1. (b) Anta man har at m=1. Da følger (6) på nøyaktig samme måte. Dette innebærer at vi ikke under noen omstendigheter kan finne z;0 der z;0ê(D^nΩD^m) om m,n≥1 & n^m. **QED.**

§11 Strukturen til mengden D.

I denne paragrafen vil det bli gitt bevis for de satser som er oppført i §11 i Del I. I tillegg vil også enkelte satser angående aksiomet A13 bli behandlet. Dette aksiomet ble innført i denne paragrafen i Del I. Det r naturlig å starte med:

Teorem 33 (E;1) (i) Exp(2^I, D^n) ≈ Exp(Pt(D^n),I) »= Pt(D^n) » D^n
(ii) nê(N-{ø}) –> (A;n ≈ Exp(2^I,D^n))
(iii) nê(N-{ø}) –> A;n»D

Bevis: Som man umiddelbart ser ved å studere dette teoremet følger punkt (iii) fra punkt (i) - (ii). Fra Teorem 11 fremgår det at hvis nê(N-{ø}) gjelder:

q;n : A;n –(1-1,på) –> Exp(Pt(D^n),I).

Fra Teorem 14 fremgår det videre at p;n : A;n –(1-1,på) –> Exp(U,D^n)
Fra disse to tingene følger for det første punkt (ii) i teoremet og for det andre at Exp(2^I,D^n) ≈ Exp(Pt(D^n),I), dvs. første del av punkt (i). Har man nå at

M(x) & M(y) & x≠ø & Cd(y) ≥ Aleph;0 kan man lett utlede den følgende rent mengdeteoretiske sats: (1) Exp(Pt(x),y) »= Pt(x) » x. Den siste delen av denne påstanden utgjør det som vanligvis kalles Cantors sats. (Se Takeuti [1], Teorem 10.4) Siden M(D^n) & M(I) følger fra (1) ved å sette x=D^n og y=I at de to siste delene av punkt (i) holder. **QED.**

Teorem 34 (E;1) E»D

Bevis: Man har per definisjon at E = UN(Mg(A;n: nê(N-{ø}))) »=A;n»D^n»D om nê(N-{ø}). **QED.**

§12 Noen flere betraktninger over eksistensen til mengden D.

I denne paragrafen vil det bli gitt et bevis for Teorem 35 som er oppført i §13 i Del I. Vi minner om at I1 – I4 er de følgende formler i L;e[Δ]:

I1 At;1(x) & wêI & H(z,x,w) –> MI(z)
I2 (Ex)(At;1(x)) & (Ex)(MV(x))
I3 (At;1(x) & wêI) –> (Ez)(M(z) & z = Mg(y: H(y,x,w)))
I4 At;1(x) –> (Ey)(At;1(y) & (Aw)(Az)(wêI & MI(z).–>
(H(z,y,w) <–> ¬H(z,x,w))))

Teorem 35 er den følgende setning:

Teorem 35 (ZFCu(L;e[Δ])) I1 & I2 & I3 & I4 –> A5

Bemerkning: Man erindrer at A5 er det følgende aksiom i L;e[Δ]:

A5 (Ey)(M(y) & y= Mg(x: MI(x)))

Mao. sier A5 at det finnes en mengde som inneholder alle de mulige individene og utelukkende dem.

Bevis: Anta (1) I1 & I2 & I3 & I4. Fra I2 følger eksistensen av x;0 slik at (2) At;1(x;0). Videre følger fra I2 at det finnes en w;0 der man har: MV(w;0), mao. at (4) w;0êI. Fra (2), (4) og I3 følger eksistensen av z;0 der man har:

(5) M(z;0) & z;0 = Mg(y: H(y,x;0,w;0))

Fra (2) og I4 følger eksistensen av y;0 slik at:

(6) At;1(y;0) & (Aw)(Az)(MV(w) & MI(z) –> (H(z,y;0,w) <–> ¬H(z,x;0,w)))

Fra (4),(6) og I3 følger eksistensen av z;1 der (7) M(z;1) & z;1 = Mg(y: H(y,y;0,w;0)). Fra (5), (7) og foreningsmengde-aksiomet i ZFCu(L;e[Δ]) følger at det finnes r slik at (8) r= z;0Uz;1 & M(r). Vi vil vise at (+) r=Mg(y : MI(y)), for fra dette og (8) følger A5. Anta for vilkårlig y at yêr. Fra (8) har man da yêz;0 v yêz;1. Er yêz;0 har man fra (5) at (9) H(y,x;0,w;0). Fra (2), (4), (9) og I1 følger i så fall MI(y). Er på den annen side yêz;1 følger fra (7) at H/y,y;0,w;0). Fra dette, I1, (4) og (6) følger MI(y). Det har nå blitt bevist at (10)

(Ay)(yêr –> MI(y)). Anta på den annen side for vilkårlig y at MI(y). Man har da enten at H(y,x;0,w;0) eller ¬H(y,x;0,w;0). I det første tilfellet har man i lys av (5) at yêz;0 Inkl z;0Uz;1=r. I det andre tilfellet har man siden MI(y) & w;0êI & At;1(x;0) at H(y,y;0,w;0) i lys av (6). I begge tilfelle følger yêr. Dette viser at (11) (Ay)(MI(y) –> yêr). Fra (10) og (11) følger
(Ay)(yêr <–> MI(y)). Dette viser at (+) holder. **QED.**

§13 Noen viktige trekk ved teorien E;3.

I denne paragrafen vil vi ta for oss de teoremene om teorien E;3 som er oppført i §15 i Del I. Det dreier seg altså om Teorem 36 – Teorem 42. Vi starter med:

Teorem 36 (E;3) (i) ¬(Ey)(M(y) & y =Mg(x: x=x))
(ii) ¬(Ey)(M(y) & y=D)
(iii) ¬A5

Bevis: Det bemerkes at (iii) er en triviell reformulering av (ii) og at (ii) følger fra (i) ved hjelp av definisjnen av D som er D= Mg(x: MI(x)) samt aksiom E7 i E;3. E7 er den følgende formel: (Ax)(MI(x) <–> x=x). Det er derfor helt tilstrekkelig å gi bevis for (i).

Anta for reduktio ad absurdum at det finnes y der man har :

(1) M(y) & y=Mg(x: x=x)

I lys av utsondringsaksiomet i ZFCu(L,e[Δ]) finnes det da en mengde r som er slik at (2) M(r) & r=yΩMg(x: ¬xêx). Fra (1) og (2) følger (3) r=Mg(x: ¬xêx)
Det er to muligheter: (i) rêr. I så fall har man fra (3) at ¬rêr. Men dette gir en en motsigelse. (ii) ¬(rêr). Men da har man ved hjelp av (3) ar rêr. Dette gir en likeledes en motsigelse. I begge tilfelle kan man utlede en motsigelse. Dette innebærer at det ikke finnes noen y som oppfyller kravet (1). **QED.**

Teorem 37 (E;3) nê(N-{ø}) –> ¬(Ey)(M(y) & y=Mg(x: At;n(x)))

Bevis: Anta for vilkårlig n at (1) nê(N-{ø}). Målet er å vise eksistensen til en avbildningen f der man har:

(+) f: Mg(x:x=x) –(1-1)–> Mg(x: At;n(x))

Har man da at M(Mg(x:At;n(x))) vil man i så fall ha M(f‘‘Mg(x:x=x)) i lys av delmengdeaksiomet og videre at V= f;-1‘‘(f‘‘Mg(x:x=x)) = Mg(x:x=x) er en mengde i lys av substitusjonsaksiomet. Dette er imidlertid utelukket i følge Teorem 36. Det vil derfor være tilstrekkelig å konstruere en f som oppfyller kravet (+).

Vi definerer q;n som tidligere. Er da x en mengde og XêExp(Pt(x^n),I) kan man lett overbevise seg selv om at (q;n);-1(X)êA;n. Videre er det nokså greit å innse at q;n er en-entydig. π;n(x) der nê(N-{ø}) er definert ved:

(2) π;n(x) = Mg(<j,x>:jên)

Med andre ord er π;n(x) den sekvensen av lengde n der alle leddene er x, dvs. <a;0,...,a;(n-1)> der a;k=x for k=0,...,n-1. Videre defineres s;n(x) ved:

(3) s;n(x) = Mg(<w,{π;n(x)}>: wêI)

Tilslutt defineres f ved:

(4) f(x) = (q;n);-1(s;n(x)) om xêV=Mg(x: x=x)

Det er klart fra måten f er definert på at Dom(f) = V. Er xêV er det også lett å se fra definisjonen av s;n at (6) s;n(x)êExp(Pt({x}^n),I). Fra dette, det at M({x}^n), definisjonen

av q;n og E5 følger at (q;n);-1(s;n(x))êA;n, mao. f(x)êA;n. Er x≠y har man at π;n(x)≠π;n(y) og derfor i lys av (3) at s;n(x)≠s;n(y). Siden (q;n);-1 er en-entydig og s;n(x),s;n(y)êRgn(q;n) følger at (q;n);-1(s;n(x)) ≠ (q;n);-1(s;n(y)). Dette viser at f også er en-entydig. Så langt har det blitt bevist at (7) f: V –(1-1)–> A;n.
Var nå A;n en mengde ville imidlertid også V være det. Men dette strider mot Teorem 36 siden V=Mg(x:x=x). **QED.**

Vi går så over til å betrakte:

Teorem 38 (E;3) ¬(Ey)(M(y) & y=Mg(x: M(x)))

Bevis: Anta for reduktio ad absurdum at det finnes r;1 slik at
(1) M(r;1) & r;1=Mg(x: M(x))
I lys av utsondringsaksiomet, som er et av de mengdeteoretiske aksiomene i E;3, må det da finnes en r;2 slik at:
(2) M(r;2) & r;2=(Mg(x: M(x) &¬(xêx))Ωr;1
Fra (1) og (2) følger r;2=Mg(x: M(x) & ¬(xêx)). I så fall har man:
(3) r;2êr;2 <–> (M(r;2) & ¬(r;2êr;2)) <–> ¬(r;2êr;2) (Jmf. (2)
Men (3) er åpenbart usann. Det kan derfor ikke finnes noen r;1 som oppfyller kravet (1).
QED.

Teorem 39 (E;3)
(i) M(X) & At;n(X,x) –> nê(N-{ø})
(ii) M(X) & H(x,y,w) –> (wêI &(En)(nê(N-{ø}) & At;n(X,y)))
(iii) M(X) & H(x,y,w) & At;n(X,y) –> xêX^n
(iv) M(X) & nê(N-{ø}) –> (Ey)(M(y) & y = Mg(x: At;n(X,x)))
(v) M(X) –> (Ey)(M(y) & y= X)
(vi) M(X) & Ca(X)≥ Aleph;0 –> Ca(X) ≥Aleph;0
(vii) M(X) & At;n(X,y;1) & At;n(X,y;2) & nê(N-{ø}) &
(Aw)(wêI –> Mg(x: H(x,y;1,w)) = Mg(x: H(x,y;2,w)). –>
y;1 = y;2.

I forbindelse med dette teoremet bemerkes det at At;n(X,x) er definert ved:

(D1) At;n(X,y) <–> [At;n(y) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y) Inkl X^n)]

Bevis: **(i)** Dette punkt følger umiddelbart fra definisjonen av At;n(X,x) og aksiomet E;1.
(ii) Anta (1) H(y,x,w). Fra E2 følger da (2) wêI. Videre følger fra (1) og E2 at At;1(x). Fra E3 følger (4) (Aw)(wêI –> M(Ekst;w(x))). Sett per definisjon:
(5) X=UN/wêI/(Ekst;w(x)).
Fra (4) og foreningsmengdeaksiomet følger at M(X). Fra (4) og (5) kan man så slutte: (6) (Aw)(wêI –> Ekst;w(x) Inkl X). Fra (3), (6) og definisjonen av At;n(X,x) følger (7) At;1(X,x). Herav: (En)(EX)(At;n(X,x)).
(iii) Anta (1) H(x,y,w) & At;n(X,y). Fra (D1) følger da ved hjelp av (1) at Mg(z: H(z,y,w)) Inkl X^n. Men fra dette og (1) følger xêX^n.
(iv) Anta (1) M(X) & nê(N-{ø}). Vi definerer, som tidligere, EFunc;n(x) ved: (2) EFunc;n(y) = Mg(<w, Ekst;w(y)>: wêI & At;n(y)). Videre definerer videre q;n ved (3) (q;n)(x) = Mg(<x,EFunc;n(x)>: At;n(x)). På samme måte som tidligere, men nå ved hjelp av aksiomene i E;3, kan man vise:

(5) q;n : A;n –(1-1,på)–> Exp(Pt(D^n),I).

Imidlertid kan man selvfølgelig ikke lenger, som vist i forbindelse med Teorem 37, vise at A;n og Exp(Pt(D^n),I) er mengder. Fra (1) følger det på grunnlag av de mengdeteoretiske aksiomene i E;3 at Exp(Pt(X^n),I) er en mengde, mao. at

(6) M(Exp(Pt(X^n),I)). (Det er unødvendig å gå detaljert til verks på dette punkt) Nå har man (7) Exp(Pt(X^n),I) Inkl Exp(Pt(D^n),I). Fra dette og (5) følger (q;n);-1‘‘(Exp(Pt(X^n),I)) Inkl A;n. Siden (q;n);-1 er en funksjon og Exp(Pt(X^n),I) er en mengde har man ved hjelp av substitusjonsaksiomet at

(q;n);-1‘‘(Exp(Pt(X^n),I))

er en mengde. Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise at (+) Mg(x: At;n(X,x) = (q;n);-1‘‘(Exp(Pt(X^n),I)). Først gis det et bevis for inklusjonen mot venstre i (+):

(A) Anta for vilkårlig x at xê(q;n);-1‘‘(Exp(Pt(X^n),I)). Da finnes det y slik at (8) <x,y>ê(q;n) & yêExp(Pt(X^n),I). Fra den første konjunkten her og definisjonen av q;n følger (9) At;n(x) & y=EFunc;n(x). Fra (8) og (9) har man

EFunc;n(x)êExp(Pt(X^n),I)

Fra dette følger så:

(10) (Aw)(wêI –> EFunc;n(x)‘w = Ekst;w(x) Inkl X^n)

Fra (9) og (10) har man At;n(X,x) ifølge D1.

(B) Anta på den annen side at At;n(X,x). Dette innebærer ved hjelp av definisjonen av "EFunc;n(x)" at

EFunc;n(x)êExp(Pt(X^n),I)

Da har man <x,EFunc;n(x)>êq;n. Siden man ved hjelp av E1 – E3 kan vise at (Ey)(y=EFunc;n(x) & M(y)) følger xê(q;n);-1‘‘(Exp(Pt(X^n),I)). Dette avslutter beviset for punkt (iv).

(v) og **(vi).** Disse punktene er svært trivielle. (v) følger fra de identitets-teoretiske aksiomene og (vi) er en setningslogisk sannhet.

(vii) Anta: (1) M(X) & At;n(X,y;1) & At;n(X,y;2) & nê(N-{ø}).

Anta videre: (2) (Aw)(wêI –> Mg(x: H(x,y;1,w)) = Mg(x: H(x,y;2,w))).

Fra (1) og definisjonen D1 følger: (3) At;n(y;1) & At;n(y;2) & nê(N-{ø}). Fra dette og E6 følger så (4) At;1(y;1) & At;1(y;2). Fra (2) og definisjonen av "Ekst;w(x)" følger:

(5) (Aw)(wêI –> Mg(x: H(x,y;1,w))= Ekst;w(y;1) = Ekst;w(y;2))

Ved hjelp av (4), (5) og E4 kan man så slutte y;1 = y;2.

Dette avslutter beviset for Teorem 39. **QED.**

Teorem 40.1 M(x) & At;n(X,x) –> (Ey)(At;n(X,y) & (Aw)(Az)(wêI &zêX^n –> (H(z,y,w) <–> ¬H(z,x,w))))

Bevis: Anta (1) M(X) & At;n(X,x). Fra definisjonen D1 følger:

(2) At;n(x) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(x) Inkl X^n)

Fra (2) & E6 følger at (3) At;1(x). Definer f;0 ved: f;0= Mg(<w,Ekst;w(x)>: wêI). Man har da: M(f;0) & (Ey)(y=f;0). Fra (2) og definisjonen av f;0 følger:

(4) f;0êExp(Pt(X^n),I). Siden M(X) har man også (5) M(X^n). Fra (4), (5) og aksiomet E5 følger, om man setter (6) f;1(w)=X^n-f;0(w) for wêI, at det finnes y der: (7) At;1(y) & (Aw)(wêI –> f;1(w)=Ekst;w(y)) siden f;1êExp(Pt(X^n),I).

Fra (6) og (7) følger:

(8) (Aw)(wêI –> f;1(w) = Ekst;w(y) Inkl X^n).

Dette og (7) innbærer i lys av definisjonen D1 at (9) At;n(X,y) siden man også har At;n(y). Dette siste følger også fra (6) og (7), men man må i denne forbindelse benytte E6. Anta nå for vilkårlige w,z at (10) wêI & zêX^n. Da har man:

H(z,y,w) <–> zêEkst;w(y) =f;1(w) =X^n -f;0(w)
<–> ¬(zêf;0(w) = Ekst;w(x))
<–> ¬H(z,x,w).
Dette avslutter beviset for Teorem 40.1. QED.

Teorem 40.2 Anta M(X) & M(a) & (Ax)(xêa –> At;n(X,x)) & nê(N-{ø}) . Da gjelder:
(Ey)(At;n(X,y) & (Aw)(Az)(wêI & zêX^n –>
(H(z,y,w) <–> (Ax)(xêa –> H(z,x,w)))))

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder. Definer for hver xêa, f;x ved:
(1) f;x= Mg(<w,Ekst;w(x)>: wêI)
Fra den tredje forutsetningen i satsen følger:
(2) (Ax)(xêa –>(At;n(x) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(x) Inkl X^n)))
Fra (1) og (2) følger: (3) (Ax)(xêa –> f;xêExp(Pt(X^n),I).
Definer nå en funksjon g ved:
(4) g = Mg(<w,SN/xêa/(f;x(w))> : wêI)
Det er da lett å vise at (5) gêExp(Pt(X^n),I) Siden M(X) har man (6) M(X^n). Fra (5), (6) og aksiomet E5 følger eksistensen av y der man har:
(7) At;1(y) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y) = g(w))
Anta for vilkårlige w,z at (8) wêI & zêEkst;w(y). Dette innebærer at H(z,y,w). Da følger ved hjelp av (7) at zêg(w) =SN/xêa/(f;x(w)) Inkl X^n. Mao. har man at:
(9) (Aw)(Az)(wêI & H(z,y,w) –> zêX^n)
Siden M(X^n) følger ved hjelp av (7),(8) og E6 at (10) At;n(X,y). Anta nå igjen for vilkårlige w og z at (11) wêI & zêX^n. Da har man:
(12) H(z,y,w) <–> zêEkst;w(y)
<–> zêg(w)=SN/xêa/(f;x(w))
<–> (Ax)(xêa –> zêf;x(w))
<–> (Ax)(xêa –> zêEkst;w(x))
<–> (Ax)(xêa –> H(z,x,w))
Fra (10) og (12) følger så konsekventen i teoremet. **QED.**

Det er ikke nødvendig å gi noe separat bevis for punkt (iii) i Teorem 40 i Del I siden dette følger fra punkt (iv) i dette teoremet. Vi tar derfor bare for oss beviset for den følgende sats:

Teorem 40.3 (E;3) M(X) & M(x) & x Inkl X^n &
w;1≠w;2 & w;1,w;2êI & nê(N-{ø}) –>
(Ey)(Ez)(At;n(X,y) & At;n(X,z) &
Ekst;(w;1)(y)=Ekst;(w;2)(z) =x &
Ekst;(w;2)(y) Ω Ekst;(w;2)(z) =ø)

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder. Siden M(X) har man at
(1) M(X^n). Definer to funksjoner f;1,f;2 êExp(Pt(X^n),I) ved:
(2) f;1(w;1) = x & f;1(w;2)=X^n & (Aw)(wê(I-{w;1,w;2}) –> f;1(w)=ø)
(3) f;2(w;1)=x & (Aw)(wê(I-{w;1}) –> f;2(w)=ø)
Siden man har at f;1,f;2êExp(Pt(X^n),I) følger det ved hjelp av (1) og E5 at det må finnes y,z der man har:
(4) At;1(y) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y) = f;1(w))
(5) At;1(z) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(z) = f;2(w))

Fra (4), (5) og det faktum at f;i(w) Inkl X^n om wêI og i=1,2 følger det ved hjelp av D1 og E6 at: (6) At;n(X,y) & At;n(X,z). Fra (2) –(5) ser man lett at

(7) Ekst;(w;1)(y) = x = Ekst;(w;1)(z)

Likeledes ser man fra definisjonene av f;1 og f;2, samt (4) og (5):

(8) Ekst;(w;2)(y) Ω Ekst;(w;2)(z) = ø.

Fra (6), (7) og (8) følger så konsekventen i teoremet. **QED.**

Teorem 41 (E;3)

(i) At;n(x) & nê(N-{ø}) –> ¬(Ey)(At;n(y) &
(Aw)(Az)(wêI & zêD^n –>(H(z,y,w) <–> ¬H(z,x,w))))

(ii) At;n(x) & nê(N-{ø}) –> ¬(Ey)(y = Neg;(a,n)(x))

Bevis: Anta (1) At;n(x) & nê(N-}ø}). Anta videre for reduktio ad absurdum at det finnes y der man har:

(2) At;n(y) og

(3) (Aw)(Az)(wêI & zêD^n –>(H(z,y,w) <–> ¬H(z,x,w)))

Fra (19 og (2) følger ved hjelp av E6 at det må finnes a,b slik at:

(4) At;1(x) & At;1(y)

(5) M(a) & (Aw)(Az)(wêI & H(z,x,w) –> zêa^n)

(6) M(b) & (Aw)(Az)(wêI & H(z,y,w) –> zêb^n)

Siden Ca(I) ≥ Aleph;0 følger (7) w;0êI for noe w;0. Fra (4), (7) og E3 følger eksistensen av c,d der:

(8) M(c) & c=Mg(z: H(z,x,w;0)

(9) M(d) & d = Mg(z: H(z,y,w;0)

Fra (8) og (9) og foreningsmengde-aksiomet følger det at det finnes r der

(10) M(r) & r=cUd

Det vil nå bli bevist at (+) r=D^n. (A) Anta for vilkårlig z at (11) zêr. Da har man enten zêc eller zêd. I det første tilfelle har man i lys av (8) at H(z,x,w;0) som sammen med (7) og (5) impliserer zêa^n. Siden a^n Inkl D^n har man zêD^n. På tilsvarende vis ser man at zêD^n om zêd. Dette viser at inklusjonen mot høyre i (+) holder. (B) Anta for vilkårlig z at (12) zêD^n. Fra (3), (7) og (12) følger da:

(13) H(z,y,w;0) <–> ¬H(z,x,w;0)

Har man H(z,x,w;0) følger i lys av (8) zêc Inkl r. Har man ¬H(z,x,w;0) følger fra (13) at H(z,y,w;0) som sammen med (9) og (10) gir en zêd Inkl r. Dette viser at også inklusjonen mot venstre i (+) holder.

Det følger fra (10) og (+) at (14) M(D^n), ie. M(Mg(x: x=x)^n). Definer nå en avbildning π ved (15) π= Mg(<x,{x}^n>: x=x). Det skulle være klart at (16) π: V –(1-1)–>V^n. Man har derfro Rgn(π) = D^n=V^n. Fra dette, (14) samt delmengde-aksiomet følger at M(Rgn(π)). Men fra (16) har man V=π;-1‘‘Rgn(π). Ved hjelp av substitusjonsaksiomet følger da M(V). Men dette strider mot Teorem 36. Antagelsen om at et finnes en y som oppfyller kravet (2) leder derfor til en motsigelse. **QED.**

§14 Om konsistensen til teorien E;3 relativt til ZFCu(L;e)

I §16 i Del I ble den følgende intepretasjon av L;e[Δ] inn i L;e[Δ;0] definert. Det dreier seg om den intepretasjonen q av L;e[Δ] inn i L;e[Δ;0] som er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene og som dessuten oppfyller de følgende krav:

(i) q(MV(x)) = (MV(x))
(ii) q(Ut(x)) = (Ut(x))
(iii) q(True(w,x)) = (True(w,x))
(iv) q(At;n(x)) = (nê(N-{ø}) &
(Ey)(M(y) & x: I –> Pt(y^n) & UN(Rgn(x)) Inkl y^n))
(v) q(MI(x)) = (x=x)
(vi) q(H(x,y,w)) = ((Er)(M(r) & y: I –> Pt(r) &
UN(Rgn(y)) = r & zêI & xêy(z))

Vi skal nå gi bevis for:

Teorem 43 La q være den intepretasjonen av L;e[Δ] inn i L;e[Δ;0] som ble definert ovenfor. Om denne intepretasjonen gjelder:
(i) PêFm(L;e[Δ;0]) –> q(P) = P
(ii) PêFm(L;e[Δ]) & PêTh(E;3) –> q(P)êTh(T;1)

Bevis: **Ad (i)**. Dette er en nokså triviell konsekvens av den måten q er definert på og følger direkte ved induksjon på lengden av formler i L;e[Δ;0] når man erindrer at q er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene og at q ellers oppfyller kravene (i) – (iii) ovenfor.

Ad (ii). Det er lett å se at q avbilder de logiske, mengdeteoretiske og utsagnsteoretiske aksiomene (U1 – U4) i E;3 på teoremer i T;1. Likeledes at q avbilder P, P–>Q på henholdsvis q(P) og q(P)–>q(Q) slik at hvis
q(P), q(P–>Q)êTh(T;1) så er også q(Q), (Ax)q(P)êTh(T;1). Det er derfor tilstrekkelig å vise at q(Ek)êTh(T;1) om k=1 – 7 der E1 – E7 er aksiomene som ble formulert i §14 i Del I. Av disse aksiomene er det trivielt i lys av definisjonen av q at q(E1), q(E2) og q(E7) er teoremer i T;1. Det gjenstår derfor bare å undersøke E3 – E6.

Ad E3. Man har at q(E3) blir:
(1) (Aw)(wêI & q(At;n(y)) –> (Ez)(M(z) & z= Mg(x: q(H(x,y,w)))))
Det vil altså være tilstrekkelig å vise at (1) er et teorem i T;1.

Anta (2) wêI & q(At;n(y)) for vilkårlige w og y. Fra (2) og definisjonen av q følger:
(3) nê(N-{ø}) & n=1 & M(x) & y:I–> Pt(x^n) & UN(Rgn(y)) Inkl x^n for noe x og n. Fra (3) følger videre, siden n=1, at y: I–> Pt(x) & UN(Rgn(y)) Inkl x.
På basis av (2) og (3) må man nå vise at (+) (Ez)(M(z) & z= Mg(x: q(H(x,y,w)))).
Dette innebærer i lys av definisjonen av q at det må bevises at:
(++) (Ez)(M(z) & (As)(sêz <–>
(Er)(M(r) & y: I–> Pt(r) & UN(Rgn(y)) =r & wêI & qêy(w))))
Sett derfor (5) a=y(w). Fra (2) og (4) har man da y(w) Inkl x og siden M(x) følger ved hjelp av utsondringsaksiomet at M(y(w)), dvs. (6) M(a). Anta for vilkårlig s at (7) sêa. Da sêy(w) og fra (2), (3) og (4) følger i så fall:
(Er)(M(r) & y: I –> Pt(r) & UN(Rgn(y))=r & wêI & sêy(w)).
Man ser også at dette impliserer (7). Det følger at den andre konjunkten i (++) holder om vi erstatter "z" med "a". Fra dette og (6) følger så (++). Dette viser at q(E3) er et teorem i T;1.

Ad E4. Det vil være nok å vise at følgende formel er et teorem i T;1:
(1) q(At;1(y;1)) & q(At;1(y;2)) & (Aw)(wêI –>
(Ax)(q(H(x,y;1,w)) <–> q(H(x,y;2,w)))) –> y;1=y;2

Anta for reduktio ad absurdum at antesedenten i (1) holder, men at det likevel er slik at y;1≠y;2. Fra den første og andre konjunkten i antesedenten i (1), samt definisjonen av q, følger:

(3) M(z;1) & y;1 : I–>Pt(z;1) & UN(Rgn(y;1)) Inkl z;1

(4) M(z;2) & y;2 : I–>Pt(z;2) & UN(Rgn(y;2)) Inkl z;2

for noen entiteter z;1 og z;2. Fra (2), (3) og (4) følger at det finnes w;0 der (5) w;0êI og der man dessuten har: (6) y;1(w;0) ≠ y;2(w;0). Da finnes h slik at det enten må være tilfelle at (7) hêy;1(w;0) & ¬(hêy;2(w;0)) eller være tilfelle at

(8) ¬(hêy;1(w;0)) &hêy;2(w;0). Vi studerer bare det første tilfellet siden det andre tilfellet kan behandles på en helt analog måte. Fra (3), (5) og (7) følger ved hjelp av definisjonen av q at (9) q(H(h,y;1,w;0)). Fra dette, (5) og den siste konjunkten i (1) følger: (10) q(H(h,y;2,w;0)). Men fra dette og definisjonen av q (klausul (vi)) følger hêy;2(w;0) som strider mot (7). Dette viser at q(E4) er et teorem i T;1.

Ad E5. I dette tilfelle må det bevises at :

(+) (M(x) & f: I–>Pt(x)) –> (Ey)(q(At;1(y)) &
(Aw)(wêI –> (Ah)(hêf(w) <–> q(H(h,y,w)))))

er et teorem i T;1. Anta (1) M(x) & f: I–>Pt(x). Sett a= UN(Rgn(f)). Siden (Aw)(wêI –> f(w) Inkl x) har man at UN(Mg(f(w): wêI)) = UN(Rgn(f)) Inkl x. Fra dette, (1) og delmengdeaksiomet følger i lys av definisjonen av a at (2) M(a). Det skulle også være klart at man da må ha at (3) f: I –>Pt(a) & UN(Rgn(f)) = a. Fra (2), (3) og definisjonen av q følger (4) q(At;1(f)). Anta for vilkårlig w og h at
(5) wêI & hêf(w). Fra dette, (3) og definisjonen av q følger: (6) q(H(h,f,w)). Omvendt ser man lett at hêf(w) er implisert av q(H(h,f,w)) & wêI. Det følger at man derfor kan slutte: (7) (Aw)(wêI –> (Ah)(hêf(w) <–> q(H(h,f,w)))). Fra (4) og (7) følger så konsekventen i (+) ved å la y være f.

Ad E6. Det er nødvendig å vise at den følgende formel er et teorem i T;1:

(+) nê(N-{ø}) –> [q(At;n(x)) <–>. q(At;1(x)) &
(Ez)(M(z) & (Aw)(Az)(wêI &q(H(x,y,w)) –> xêz^n))]

(A) Anta (1) nê(N-{ø}) & q(At;n(y)). Da følger ved hjelp av definisjonen av q at: (2) M(g) & y: I –> Pt(g^n) & UN(Rgn(y)) = g^n for noe g. Siden man har M(g^n) om M(g) i lys av de mengdeteoretiske aksiomene som inngår i E;3 følger det at det finnes noe h slik at M(h) & h=g^n. Fra dette og (2) følger:

(3) M(h) & y: I–>Pt(h) & UN(Rgn(y)) = h. Herav kan man slutte ved hjelp av definisjnen av q at (4) q(At;1(y)). Sett per definisjon z=g. Da har man M(z). Anta videre, for vilkårlige w,x, at (6) wêI & q(H(x,y,w)). Fra dette og definisjonen av q følger da: xêy(w). Dette og (2) impliserer xêg^n=z^n. Dette viser at: (7) (Ez)(M(z)& (Aw)(Ax) (wêI & q(H(x,y,w)) –> xêz^n)) Fra (4) og (7) følger det man ønsker.

(B) Anta på den annen side at (1) nê(N-{ø}) og dessuten at:

(2) q(At;1(y)) & (Ez)(M(z) & (Aw)(Ax)(wêI & q(H(x,y,w)) –> xêz^n))

Vi ønsker å vise: (#) q(At;n(x)). Fra (2) og definisjonen av q følger:

(3) M(h) & y: I–> Pt(h) & UN(Rgn(y)) Inkl h for noe h. Videre følger fra den andre konjunkten i (2) at :

(4) M(z) &(Aw)(Ax)(wêI & q(H(x,y,w)) –> xêz^n) for noe z. Det er nå hensiktsmessig å gi bevis for: (##) y: I –> Pt(z^n) & UN(Rgn(y)) Inkl z^n. Grunnen er at (#) følger fra dette og (4). Setter man b=UN(Rgn(y)) har man ved hjelp av (3) at (5) M(b) & y: I–> Pt(b) & UN(Rgn(y)) Inkl b. Man må også ha at
(6) UN(Rgn(y)) = b. Anta for vilkårlig w at (7) wêI. For å vise at (##) holder er det nok å vise y(w) Inkl z^n. Anta derfor for vilkårlig r at (8) rêy(w). Fra (5), (6) og (8), samt definisjonen av q, følger: q(H(r,y,w)). Fra dette, (7) og (4) følger rêz^n. Dette viser at y(w)

Inkl z^n. Men w var et vilkårlig element i I. Det følger at: (Aw)(wêI –> y(w) Inkl z^n) . Fra dette kan man så slutte at yêExp(Pt(z^n),I), dvs. y: I–> Pt(z^n) & UN(Rgn(y)) Inkl z^n. Dette viser at (##) holder og avslutter dermed beviset for Teorem 43. **QED.**

Teorem 44

(i) E;3 er konsistent relativt til T;1 og ZFCu(L;e).

(ii) E;3 er en konservativ utvidelse av T;1 såvel som ZFCu(L;e)

Bevis: Ad (i). Anta E;3 er inkonsistent. Da finnes det en formel Q der (Q&¬Q)êTh(E;3) og hvor QêFm(L;e[Δ]). Ved hjelp av Teorem 43 følger da:

q(Q&¬Q) = q(Q)&¬q(Q) êTh(T;1).

Siden q(Q)êFm(L;e[Δ;0]) om QêFm(L;e[Δ]) følger det i så fall at T;1 er inkonsistent. Dette viser at den første delen av (i) holder. Siden T;1 er konsistent relativt til ZFCu(L;e) (Se Rognes "En teori om presise deskriptive utsagn") følger den andre delen av (i).

Ad (ii) Anta PêFm(L;e[Δ;0]) og at PêTh(E;3). Da har man ved hjelp av Teorem 43 at P=q(P)êTh(T;1). Dette viser at E;3 er en konservativ utvidelse av T;1. Siden T;1 i sin tur er en konservativ utvidelse av ZFCu(L;e) følger det at E;3 også er det.

§15 Forholdet mellom mengder og egenskaper i E;3

Vi gir bevis for det følgende teorem som er oppført i Del I, §17:

Teorem 45 (E;3) (Ax)(M(x) –> (Ey)(M(y) &
(Az)(zêy –> At;1(z)) & (Az)(zêy –> M(z)) & x≈y))

Dette teoremet uttrykker at det til enhver mengde finnes en likemektig mengde som utelukkende inneholder monadiske egenskaper som er mengder.

Bevis: Man har at (1) M(Ur). (I denne forbindelse bør man erindre at Ur er mengden av urindivider, dvs. mengden av alle ikke-mengder, og at "Ur" er definert ved Ur = Mg(x: ¬M(x)) Siden A;1ΩUr Inkl Ur har vi ved hjelp av delmengde-aksiomet i E;3 at (2) M(At;1ΩUr). (1) er forøvrig en direkte konsekvens av urmengde-aksiomet. Man kan nå betrakte mengden a som er definert på den følgende måte:

(3) a= UN(Mg(UN(Rgn(EFunc;1(x))) : xêA;1ΩUr))

Først vil det bli bevist at a er en mengde, dvs. at (4) M(a). For tydelighetens skyld gjøres dette helt detaljert.

Fra aksiomet E3 i teorien E;3 utleder man lett:

(5) At;1(x) –> (Aw)(wêI –> M(Ekst;w(x)))

Nå har man per definisjon av "EFunc;n(x)" at:

(6) EFunc;1(x)= Mg(<w,Ekst;w(x)>: wêI & At;1(x))

Ved hjelp av (5) følger lett: (7) (Ax)(At;1(x) –> Func(EFunc;1(x))). Videre har man: (8) EFunc;1(x)‘‘I = Mg(Ekst;w(x): wêI) om xêA;1. Fra (7), (8) og substitu-sjonsaksiomet følger: (9) M(EFunc;1(x)‘‘I). Man har nå – noe man lett overbeviser seg selv om – at: (10) EFunc;1(x) Inkl Prod(I, EFunc;1(x)‘‘I) om xêA;1. Fra (9) og det faktum at M(I), samt setningen:

(Ax)(Ay)(M(x) & M(y) –> M(Prod(x,y)))

følger at M(Prod(I, EFunc;1(x)‘‘I)). Derfor har man ved hjelp av (10) og delmengdeaksiomet at (11) M(EFunc;1(x)) om xêA;1. Nå har man videre som et generelt

mengdeteoretisk faktum at: (Ay)(M(y) –> M(Rgn(y))). Fra dette og (11) følger: (12) (Ax)(xêA;1 –> M(Rgn(EFunc;1(x)))). Ved hjelp av foreningsmengdeaksiomet kan man fra (12) slutte:

(13) (Ax)(xêA;1 –> M(UN(Rgn(EFunc;1(x)))))

Definer nå g ved:

(14) g = Mg(<x, UN(Rgn(EFunc;1(x)))> : xêA;1ΩUr)

Det skulle da være lett å vise at (15) Func(g). Videre har man at:

(16) g‘‘(A;1ΩUr) = Mg(UN(Rgn(EFunc;1(x))): xê(A;1ΩUr)).

Fra (15), (16), det forhold at M(A;1ΩUr) og substitusjonsaksiomet utleder man:

M(Mg(UN(Rgn(EFunc;1(x))): xê(A;1ΩUr))) og fra dette og forenings-mengdeaksiomet utledes M(a), dvs. formelen (4) ovenfor. Dermed er det blitt gitt et bevis for denne formelen.

Anta nå at x er en helt vilkårlig mengde, mao. anta at (17) M(x). Definer l(y) ved (18) l(y) = Mg(<w,{<y,a>}>: wêI). Det er da ingen vanskeligheter forbundet med å bevise: (19) l(y) : I –> Pt({<y,a>}) & M({<y,a>})

Fra (19), E4 og E5 følger at det finnes nøyaktig ett r slik at At;1(r) & EFunc;1(r) = l(y). e(y) defineres derfor på den følgende måte:

(20) e(y) = (ir)(At;1(r) & EFunc;1(r) = l(y))

Man har da: (21) (Ay)(yêx –> (Ez)(z=e(y))). Sett:

f = Mg(<y,e(y)> : yêx)

Da har man – som man lett innser – at: (22) f: x–(1-1)–> A;1. Siden M(x) følger da ved hjelp av substitusjonsaksiomet at:

(23) M(f ‘‘x) & f ‘‘x Inkl A;1 & f ‘‘x ≈ x

Anta nå for reduktio ad absurdum at det finnes noe q som er slik at (24) qêf‘‘x & qêUr. Da har man for noe zêx at (25) q=e(z). Fra (20) og (25) følger i så fall (26) EFunc;1(q) = EFunc;1(e(z)). Videre at (27) e(z) = qê(A;1ΩUr). Man har at EFunc;1(e(z)) = l(z). Siden w;0êI for noe w;0 følger at:

<z,a>ê l(z)‘(w;0) = EFunc;1(e(z))‘(w;0). Man har derfor:

<z,a>ê UN(Rgn(EFunc;1(q))) Inkl
UN(Mg(UN(Rgn(EFunc;1(x))) : xêA;1ΩUr)) = a

Men da har vi aê{z,a}ê<z,a>êa som strider mot fundierungsaksiomet. Det følger at ingen av elementene i f‘‘x kan være med i Ur. Fra dette og (23) følger så konsekventen i teoremet. Dette avslutter beviset for Teorem 45. **QED.**

§16 Om strukturen til universet av egenskaper.

I denne paragrafen vil vi gi bevis for de satser om er nevnt i Del I. §18.
Det kumulative mengdehierarki er definert ved transfinit induksjon innenfor rammen av ZFCu(L;e) ved den følgende definisjon:

(1) (i) V(0) = Ur
(ii) V(a+1) = V(a) U Pt(V(a))
(iii) V(a) = UN(Mg(V(b): b<a)) om aê K;II

Det bemerkes at aêK;II innebærer at a er et grenseordinaltall (limesordinal) i det K;II betegner klassen av alle grenseordinaltall.

Det følgende teorem oppsummerer og sammenfatter noen av de viktigste egenskapene til hierarkiet <V(a)>/aêOn/ :

Teorem 46 (E;3)

(i) (Aa)(aêOn –> M(V(a)))
(ii) (Ax)(xêUN(Mg(V(a): aêOn))
(iii) (Ax)(M(x) <–> xê(UN(Mg(V(a): aêOn))–Ur))
(iv) (Aa)(Ab)(a≤b –> V(a) Inkl V(b))
(v) (Aa)(aêOn –> (xêy & yêV(a+1) –> xêV(a)))
(vii) aêOn & xêV(a) –> x Inkl V(a)
(viii) aêOn –> V(a)êV(a+1)
(ix) a,bêOn & a<b –> V(a)êV(b)

Bevis: Siden dette er en rent mengdeteoretisk sats og derfor utledbar i ZFCu(L;e) vil det ikke bli gitt noe detaljert bevis her. Hovedgrunnen er at beviset blir for langt og egentlig ikke gir noen informasjon som er av interesse for de andre forhold som behandles her. Det avgjørende punkt i teoremet er punkt (ii). Denne påstanden er helt analog med Teorem 9.13 i Takeuti [1]. Beviset for punkt (ii) er derfor også helt analogt med beviset for Teorem 9.13 i Takeutis bok. Satsen blir der bevist i ZFC og dreier seg om det rene kumulative mengdehierarki, men det er lett å omforme dette beviset slik at man får et for (ii) ovenfor.

Det bemerkes videre at (iv) følger nokså umiddelbart fra (ii). Når det gjelder (i) og (iii) bevises disse lett ved induksjon. (v) kan lett utledes fra (iii). Det er også lett å vise at (vii) følger fra (vi) som så i sin tur kan bevises ved induksjon. Tilslutt bemerkes det at (viii) følger lett fra definisjonen (1) og at (ix) er en nokså umiddelbar følge av (viii). Dette avslutter skissen av beviset for Teorem 46. **QED.**

Mengden av egenskaper over mengden X, i symboler Eg(X), er definert ved:

(2) Eg(X) = Mg(y: At;1(y) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y)êX)

(Jmf. Del I, §18, definisjon (4)). I forbindelse med dette begrepet betraktes det følgende teorem:

Teorem 47 (i) (M(x) & M(y) & x Inkl y) –> Eg(x) Inkl Eg(y)
(ii) (M(x) & M(y) & x SInkl y) –> Eg(x) SInkl Eg(y)
(iii) a,bêOn & a<b –> Eg(V(a)) SInkl Eg(V(b))
(iv) (Aa)(aêOn –> M(Eg(V(a)))
(v) (Ax)(At;1(x) <–> xêUN(Mg(Eg(V(a)): aêOn)))

Bevis: **Ad (i)** Anta (1) M(x) & M(y) & x Inkl y. Anta dessuten at zêEg(x) for vilkårlig z. Fra definisjonen av Eg(x) følger da at

At;1(z) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(z) Inkl x)

Fra dette og (1) følger: At;1(z) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(z) Inkl y). Men dette og definisjonen av Eg impliserer zêEg(y). Det følger at Eg(x) Inkl Eg(y) siden z var et helt vilkårlig element.

Ad (ii). Anta (1) M(x) & M(y) & x SInkl y. Fra (1) og punkt (i) følger da (2) Eg(x) Inkl Eg(y). Fra (1) følger det at det finnes z der (3) zêy & ¬(zêx). Man har (4) M({z}) . Setter man (5) f= Mg(<w,{z}>: wêI) har man f: I –> Pt({z}). Fra dette, E4 og E5 følger så eksistensen av en entydig bestemt egenskap u der man har: (6) At;1(u) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(u) ={z}). Fra (6) og (3) følger:
(7) ¬(Aw)(wêI –> Ekst;w(u) Inkl x). Fra (6) og (7) og definsjonen av Eg(x) følger derfor (8) ¬(uêEg(x)). Fra (6) og (3) følger også: (Aw)(wêI –> Ekst;w(u) Inkl y). Dette, (6) og definisjonen av Eg gir en (9) uêEg(y). Fra (2),(8) og (9) følger så det man ønsker, nemlig: Eg(x) SInkl Eg(y).

Ad (iii). Antar man a<b & a,bêOn følger fra Teorem 46, punkt (v), at V(a) SInkl V(b). Fra teorem 46, punkt (i) følger videre at M(V(a)) & M(V(b)). Fra dette og den påstand som ble bevist rett ovenfor har man så i sin tur at Eg(V(a)) SInkl Eg(V(b)).

Ad (iv). Anta (1) aêOn. Fra Teorem 46, punkt (i), følger da: (2) M(V(a)). Siden man lett i ZFCu(L;e) kan utlede at (Ax)(Ay)(M(x) &M(y) –> M(Exp(x,y))) følger fra (2), sidem M(I) at (3) M(Exp(Pt(V(a)),I)). Man må da også i tillegg benytte potensmengdeaksiomet. Definer nå e(x) ved:

(4) e(x) = (iy)(At;1(y) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y) = x(w))

Fra (2), (3), E4 og E5 følger da: (5) (Ax)(xêExp(Pt(V(a)),I) –> (Ey)(y= e(x))). Definer nå f ved (6) f= Mg(<x,e(x)>: xêExp(Pt(V(a)), I)). Man beviser lett at (7) Func(f) og at (8) f: Exp(Pt(V(a)),I) –(1-1)–> A;1. Kan man nå vise at:

(+) f ‘‘Exp(Pt(V(a)),I) = Eg(V(a))

følger ved hjelp av (3) og substitusjonsaksiomet at M(Eg(V(a))) som er det man ønsker.

(A) Først bevises inklusjonen mot venstre i (+): Anta xêEg(V(a)). Dette innebærer at At;1(x) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(x) Inkl V(a)). Det er da lett å se at det må finnes noe y der y= EFunc;1(x)êExp(Pt(V(a)),I) og at e(y)=x. Dette innebærer at xêf ‘‘ Exp(Pt(V(a)),I).

(B) Når det gjelder inklusjonen mot høyre kan man først anta for vilkårlig x at xêf ‘‘ Exp(Pt(V(a)),I). Da har man x=e(y) for noe y der yêExp(Pt(V(a)),I). Fra dette og (4) følger da:

At;1(x) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(x)=y(w) inkl V(a))

Dette innebærer at xêEg(V(a)). Dette avslutter beviset for punkt (iv).

Ad (v). xêUN(Mg(Eg(V(a)): aêOn)). Da finnes b slik at xêEg(V(b)). Fra dette og definisjonen av Eg følger umiddelbart at At;1(x). Anta på den annen side at (1) At;1(x). Fra (1) og E3 følger (2) (Aw)(wêI –> M(Ekst;w(x))).
Definer b;0 ved b;0 = UN(Mg(Ekst;w(x): wêI)). Ved hjelp av substitusjonsaksiomet har vi: M(Mg(Ekst;w(x): wêI)) og fra dette og foreningsmengdeaksiomet følger M(b;0). da finnes det y slik at (3) y=b;0 & M(y). I så fall må man ha: (4) At;1(x) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(x) Inkl y). Siden M(y) følger ved hjelp av Teorem 46 at yêV(d) for noe dêOn. Det følger videre at
y Inkl V(d). Fra dette, (4) og definisjonen av Eg følger xêEg(V(d)) & dêOn.
Da xêUN(Mg(Eg(V(a)): aêOn)).

Dette avslutter beviset for Teorem 47. **QED.**

Teorem 48 i Del I, §18, inneholder de følgende to begreper, EFunc;1(x) og q;1, som det på dette punkt kan være passende å minne om definisjonene av:

(3) EFunc;1(x) = Mg(<w,Ekst;w(x)>: wêI)
(4) q;1 = Mg(<x,EFunc;1(x)>: At;1(x))

Det vil nå bli gitt et bevis for den følgende sats:

Teorem 48 (E;3) Er aêOn gjelder følgende:
Rest(q;1,Eg(V(a)) : Eg(V(a)) –(1-1,på)–> Exp(Pt(V(a)),I)

Bevis: I lys av E3 har man om xêA;1 at (1) M(EFunc;1(x)). Anta at:
<x,y;1>,>x,y;2> êq;1. Fra definisjonen av q;1 følger i så fall eksistensen av z;1 og z;2 der man har:

(2) <x,y;1> = <z;1, EFunc;1(z;1)> & z;1êA;1

(3) <x,y;2> = <z;2, EFunc;1(z;2)> & z;2êA;1

Herav følger z;1=x=z;2 og derfor (4) EFunc;1(z;1) = EFunc;1(z;2). Fra (2) – (4) kan man derfor slutte: y;1=Efunc;1(z;1) = EFunc;1(z;2) = y;2. Dette viser at q;1 er en funksjon. Anta på den annen side at <x;1,y>,<x;2,y>êq;1. Fra definisjonen av q;1har man da på samme måte som ovenfor at det må finnes to objekter z;1,z;2 der:

(5) <x;1,y> = <z;1, EFunc;1(z;1)> & z;1êA;1

(6) <x;2,y> = <z;2, EFunc;1(z;2)> & z;2êA;1

Fra dette fremgår det at EFunc;1(z;1) = EFunc;1(z;2). Dette og E4 berettiger en til å trekke den slutning at z;1=z;2. Men ved hjelp av (5) og (6) har man da

x;1 = z;1 = z;2 = x;2.

Dette viser at q;1 også er en-entydig.

Nå er det nokså trivielt å vise at (7) Dom(Rest(q;1,Eg(V(a)))) = Eg(V(a)). Det som gjenstår er derfor bare å føre et bevis for at:

Rgn(Rest(q;1,Eg(V(a)))) = Exp(Pt(V(a)),I).

(A) Anta zêRgn(Rest(q;1,Eg(V(a)))). Da finnes det y slik at <y,z>êRest(q;1,Eg(V(a))). Herav følger <y,z>êq;1 & yêEg(V(a)). Da har man:

(1) At;1(z) & z= EFunc;1(y) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y) Inkl V(a))

Man har: z= Mg(<w, Ekst;w(y)>: wêI & At;1(y)). Men fra dette og (1) er det lett å se at zêExp(Pt(V(a)),I).

(B) Anta på den annen side at zêExp(Pt(V(a)),I). Fra dette og E5 følger eksistensen av y der:

(8) At;1(y) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y)=z(w))

Det er da ikke vanskelig å se at y har z som sin ekstensjonsfunksjon, ie. at EFunc;1(y) =z og derfor at man har <y,z>êq;1. Men det er også klart i lys av (8) og det forhold at zêExp(Pt(V(a)),I) at man må ha yêEg(V(a)). Det følger at: <y,z>ê Rest(q;1,Eg(V(a))) og derfor at zê Rgn(Rest(q;1,Eg(V(a)))). **QED.**

Det kumulative egenskaphierarkiet <EG(a)>/aêOn/ er definert ved transfinit induksjon på den følgende måte:

(5) (i) EG(0) = Ur

(ii) EG(a+1) = EG(a) U Eg(EG(a))

(iii) EG(a) = UN(Mg(EG(b): b<a)) om aêK;II

Man kan i denne forbindelse studere Del I, §18, Definisjon 7. Man definerer klassen av rigide egenskaper over X, Eg;r(X), ved:

(6) Eg;r(X) = Mg(y; At;1(y) & (Ea)(M(a) & a Inkl X & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y)=a)))

Ved hjelp av Eg;r definere så det kumulative hierarkiet av rigide egenskaper på den følgende måte:

(7) (i) EG;r(0) = Ur

(ii) EG;r(a+1) = EG;r(a) U Eg;r(EG;r(a))

(iii) EG;r(a) = Un(Mg(EG;r(b): b<a)) om bêK;II

Det teoremet som det nå vil bli gitt et bevis for er da:

Teorem 49 (E;3) (i) (Aa)(aêOn –> M(EG(a)) & M(EG;r(a)))
(ii) a,bêOn & a≤b –> EG(a) Inkl EG(b) & EG;r(a) Inkl EG;r(b)
(iii) a,bêOn & a<b –> EG(a) SInkl EG(b) & EG;r(a) SInkl EG;r(b)
(iv) A;1 Ω Ur≠ø & a≥2 & aêOn –> EG;r(a) SInkl EG(a)

Bevis: **Ad (i).** Man beviser dette ved induksjon på a. (A) Er a=0 har man EG(a)=Ur=EG;r(a) og det følger under disse omstendigheter at M(EG(a)) & M(EG;r(a)) ved hjelp av urmengdeaksiomet som er et av aksiomene i ZFCu(L;e) og derfor også et aksiom i E;3. (B) Anta setningen holder for a, mao. anta at:
M(EG(a)) & M(EG;r(a)). Da har man EG(a)êV(b) for noe bêOn og derfor at EG(a) Inkl V(b) ifølge Teorem 46, (viii). Siden M(V(b)) følger i lys av Teorem 47,(i) at Eg(EG(a)) Inkl Eg(V(b)). Det følger da ved hjelp av delmengde-aksiomet at M(Eg(EG(a))). Dette og det forhold at M(EG(a)) impliserer ved hjelp av foreningsmengdeaksiomet at M(EG(a+1)). Det er lett på grunnlag av definisjonen av Eg;r å se at Eg;r(x) Inkl Eg(x). Nå har man etter induksjonshypotesen at M(EG;r(a)). Det følger da ved hjelp av Teorem 46 at EG;r(a) Inkl V(b) for noe bêOn. Da: Eg;r(EG;r(a)) Inkl Eg(EG;r(a)) Inkl Eg(V(b)). Siden M(Eg(V(b))) følger M(Eg;r(EG;r(a))) ved hjelp av delmengde-aksiomet. Fra dette, induksjonshypotesen og foreningsmengdeaksiomet utleder man derfor at M(EG;r(a+1)) (C) Anta aêK;II og at (Ab)(b<a –>M(EG(b)) & M(EG;r(b))). Ved hjelp av substitusjonsaksiomet har man da:

M(Mg(EG(b):b<a)) & M(Mg(EG;r(b): b<a)

Men fra dette og foreningsmengde-aksiomet følger M(EG(a)) & M(EG;r(a)).

Ad (ii). Anta (1) a,bêOn & a≤b. Det er to muligheter når det gjelder b.
Tilfelle (a): (2) bêK;I. Da har man enten b=0 eller b=d+1 for et eller annet ordinaltall d. I det første tilfellet må a=0 og man har EG(a)=EG(0)=Ur=EG(b) og derfor selvfølgelig at EG(a) Inkl EG(b). I det andre tilfellet har man (3) a≤b=d+1. Det følger at a≤d+1 og derfor at EG(b)=EG(d)UEg(EG(d)). Ved hjelp av induksjonshypotesen har man da EG(a) Inkl EG(d) Inkl EG(d)UEg(EG(d)) =EG(b).
Tilfelle (b) : bêK;II. Da har man EG(b)= UN/d<b/(EG(d)). Siden a≤b følger satsen umiddelbart i det tilfelle at a=b. Har man a<b følger EG(a) Inkl UN/d<b/(EG(d)).

Beviset for at EG;r(a) Inkl EG;r(b) om a≤b &a,bêOn føres på en helt tilsvarende måte og overlates derfor til leseren.

Ad (iii). Anta (1) a,bêOn & a<b. Satsen bevises ved induksjon på b. (A) Er b=0 holder satsen trivielt siden det ikke finnes ordinaltall a<0. (B) Er b=d+1 har man (2) EG(b)=EG(d)UEg(EG(d)). La xêPt(EG(d)). Definer r(x) ved:

r(x) = (iy)(At;1(y) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y)=x) og definer q ved:

q= Mg(<x,r(x)>: xêPt(EG(d)))

Det er da lett å vise at q: Pt(EG(d) –(1-1)–> Eg(EG(d)). Siden

EG(d)«Pt(EG(d))=« Eg(EG(d)) (Cantors sats)

følger at EG(d) SInkl (EG(d)UEg(EG(d)). Fra induksjonshypotesen har man EG(a) Inkl EG(d). Det følger at EG(a) Inkl EG(d) SInkl (EG(d)UEg(EG(d)) = EG(b).
(C) Er bêK;II har man EG(b)= UN/d<b/(EG(d)). Siden a<b har man da a+1<b og derfor: EG(a) SInkl EG(a+1) Inkl UN/d<b/(EG(d)) = EG(b).

Beviset for at EG;r(a) SInkl EG;r(b) om a<b &a,bêOn føres på akkurat samme måte.

Ad (iv). Anta aêOn & ¬(aê{0,1}). Det vil først bli ført et bevis for at (+) EG;r(a) Inkl EG(a) for alle aêOn. Satsen holder åpenbart om a=0. Anta den holder for alle b<a og at a=d+1. Da har man EG;r(a) = EG;r(d)UEg;r(EG;r(d)) og EG(a) = EG(d)UEg(EG(d)). Fra induksjonshypotesen følger (1) EG;r(d) Inkl EG(d).

Anta xêEg;r(EG,r(d)). Da har man:

At;1(x) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(x)=c) & c Inkl EG;r(d)

Da har man c Inkl EG;r(d) Inkl EG(d) i lys av (1), og man har følelig at:

At;1(x) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(x) Inkl EG(d)). Dette innebærer at xêEg(EG(d)). Siden x var et helt vilkårlig objekt følger

(2) Eg;r(EG;r(d)) Inkl EG(d). Fra (1) og (2) følger: EG;r(a) Inkl EG(a). Anta aêK;II og at xêEG;r(a). Da har man xêEG;r(b) for noe b<a. Ved hjelp av induksjonshypotesen kan man da slutte at

xêEG(b) Inkl UN/d<a/(EG(d)) = EG(a)

Dette viser at (+) holder.

Man kan nå definere en egenskap e(w;0) der w;0êI ved å sette:

(3) e(w;0) = (ix)(At;1(x) & (Aw)(wê(I-{w;0}) –> Ekst;w(x)=ø) & Ekst;(w;0)(x)=EG;r(1)

Siden M(EG;r(1)) er det lett på basis av E4 og E5 å vise at e(w;0)êA;1 om w;0êI.

Merk at hvis Ur=ø, en påstand som logisk sett er forenelig med E;3, har man at EG;r(1) = Mg(x: At;1(x) & (Ec)(c Inkl ø & (Aw)(wêI –> Ekst;w(x)=c)))= Mg(x: At;1(x) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(x)=ø)) = {Ø;1} = EG(1). EG;r(1) inneholder under denne forutsetning nøyaktig ett attributt, nullattributtet, og man ser at EG(1) gjør det samme. Man kan derfor ikke vise at EG;r(1) SInkl EG(1) i E;3. Det er derfor forbeholdet om at a≥2 er blitt tatt med i punkt (iv).

Fra definisjonen av e(w;0) følger:

At;1(e(w;0)) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(e(w;0)) Inkl EG;r(1) Inkl EG(1))

Vi har derfro at e(w;0)êEg(EG(1)) Inkl EG(2). Fra dette og punkt (iii) i teoremet følger at (4) (Aa)(a≥2 –> e(w;0)êEG(a)). Anta nå at (#) e(w;0)êEG;r(a) for noe aêOn. Da må det finnes et minste ordinaltall d;0 som oppfyller som er slik at e(w;0)êEG,r(d;0). Anta d;0êK;I. Da har man om d;0=0 at e(w;0)êEG;r(0)=Ur. Men e(w;0)êAt;1 og etter forutsetningene har man A;1ΩUr=ø. Det følger at d;0≠0 og derfor at d;0=b+1 for noe bêOn. Da har man imidlertid

e(w;0)êEG;r(b)UEg;r(EG;r(b))

Var da e(w;0)êEG;r(b) ville ikke d;0 være det minste ordinaltall slik at (#). Derfor må man ha at e(w;0)ê Eg;r(EG;r(b)). Men da følger det at det finnes noe c slik at:

(5) c Inkl EG;r(b) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(e(w;0))=c)

Siden w;0êI &(I-{w;0})≠ø finnes w;1êI der w;1≠w;0. Da følger Ekst;(w;1)(e(w;0))=ø og Ekst;(w;0)(e(w;0))=EG;r(1). Men dette strider mot (5) siden EG;r(1)≠ø. Det følger at ¬(d;0êK;I). Er imidlertid d;0êK;II har man e(w;0)êUN/b<d;0/(EG;r(b)). da må man ha e(w;0)êEG;r(b) for noe b<d;0. Dette strider imidlertid også mot det forhold at d,0 skal være det minste ordinaltall der man har at (#) holder. Fra dette følger at ¬(Ea)(aêOn & e(w;0)êEG;r(a)). Herav har man:

(6) (Aa)(aêOn –> ¬(e(w;0)êEG;r(a))). Fra dette, (4), samt det forhold at (Aa)(aêOn & a≥2 –> EG;r(a) Inkl EG(a)) følger at:

(Aa)(aêOn& a≥2 –> EG;r(a) SInkl EG(a))

Dette avslutter beviset for punkt (iv) og dermed også beviset for Teorem 49. **QED.**

Det neste teoremet som er oppført i Del I etter Teorem 49 er :

Teorem 50 (E;3) (UN(Mg(EG(a): aêOn) – EG(0)) Inkl Mg(x: At;1(x))

Dette teoremet uttrykker at hvis man fjerner alle urindividene fra elementene som dukker opp i det kumulative egenskapshierarkiet får man tilbake utelukkende elementer som

er egenskaper. Dette virker intuitivt sett temmelig opplagt, men skal man være helt sikker på at de definisjonene som har blitt gitt er det rimelig å levere et rigorøst bevis for påstanden.

Bevis: Anta for vilkårlig x at (1) xê(UN(Mg(EG(a): aêOn) – EG(0)). Da har man at det finnes en b der (2) bêOn og hvor (3) xêEG(b) & ¬(xêEG(0)). Det følger at A= Mg(b: bêOn & xêEG(b)) ≠ø. La d være det minste ordinaltallet i A. I lys av de mengdeteoretiske aksiomer og definisjoner som inngår i E;3 kan man vise at det finnes et slikt ordinaltall. Man har altså at (4) dêOn & d=µb(bêOn & xêEG(b)). Fra (3) og (4) følger (5) xêEG(d). Det er nå to muligheter angående d.

Tilfelle (a): dêK;I. Da har man enten at d=0 eller at d=b+1 for noe bêOn. Den første muligheten er utelukket ifølge (3) og (5). man må derfor ha at (6) d=b+1. Dette innebærer i lys av (5) at xêEG(d)=EG(b+1)= EG(b)UEg(EG(b)). Var nå xêEG(b) ville dette stride mot (4) siden b<d. Derfor må man ha at:

xêEg(EG(b)) = MG(y: At;1(y) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y) Inkl EG(b)))

Men fra dette følger At;1(x) ie. xêMg(x: AT;1(x)). Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (b): dêK;II. Da har man i lys av (5) og definisjonen av <EG(a)>/aêOn/ at (8) xêEG(d)=UN/b<d/(EG(b)). Det må i så fall finne b der man har (9) xêEG(b) & b<d. Men dette strider mot (4). Det følger derfor at dette tilfellet er utelukket. Satsen holder derfor i alle mulige tilfelle. Dette avslutter beviset for Teorem 50. **QED.**

Vi skal nå ta for oss det siste teoremet som er oppført i "Egenskaper. Del I" og gi et bevis for det. Imidlertid minnes det først om at man definerer en funksjon ß* ved:

(+) ß*(x) = (q;1);-1(Mg(<w,x>: wêI))

Er x en mengde vil Mg(<w,x>: wêI) være konstantfunksjonen som til hver mulig verden tilordner mengden x. (q;);-1(Mg(<w,x>: wêI)) vil da være det attributtet som har denne konstantfunksjonen som sin ekstensjonsfunksjon. I lys av dette for forhold er det ikke overaskende at man kan bevise:

Lemma 50.1 Anta M(x). Da gjelder:

Mg(ß*(a): M(a) & a Inkl x) = Eg;r(x)

Bevis: (A) Anta for vilkårlig y at (1) yêMg(ß*(a): M(a) & a Inkl x). Da finnes det et eller annet objekt a slik at (2) y=ß*(a) & M(a) & a Inkl x. Fra definisjonen (+) følger ved hjelp av (2) : y= (q;1);-1(Mg(<w,a>: wêI)). Da har man:

(3) <y, Mg(<w,a>: wêI)>êq;1.

Fra dette og definisjonen av q;1 følger at det finnes z slik at:

(4) <y, Mg(<w,a>: wêI)> = <z,EFunc;1(z)> der zêA;1.

I så fall følger z=y og EFunc;1(z) = Mg(<w,a>: wêI). Fra dette følger i sin tur:

(Aw)(wêI –> Ekst;(y)=a) & a Inkl x.

Da må man imidlertid ha yêEg;r(x). (B) Har man yêEg;r(x) for vilkårlig y følger: (1) At;1(y) & (Ea)(a Inkl x & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y)=a). Da har man for noe a at: (2) M(a) & a Inkl x & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y)=a). Det følger i så fall at EFunc;1(y) = Mg(<w,a>: wêI) og derfor at <y, Mg(<w,a>: wêI)>êq;1. Dette impliserer imidlertid at y=ß*(a) & a Inkl x & M(a). Men herav følger yê Mg(ß*(a): M(a) & a Inkl x). Dette avslutter beviset for påstanden. **QED.**

Målet er nå å vise at det kumulative mengdeunivers kan avbildes en-entydig inn i det kumulative hierarki av rigide egenskaper. For dette formål defineres en avbildning f ved transfinit induksjon på den følgende måte:

(++) (i) f(0) = Rest(Id, Ur) = Mg(<x,x>: xêUr)
(ii) f(a+1) = f(0) U Mg(<z, ß*(Mg(f(a)‘y: yêz)>: zêPt(V(a)))
(iii) f(a) = UN(Mg(f(b): b<a)) om bêK;II

Det bemerkes i denne forbindelse at Id er identitesrelasjonen og at denne er definert formelt slik: Id= Mg(<x,x>: x=x)

Den satsen som det nå vil bli gitt bevis for er denne:

Teorem 51 (E;3) Anta Rgn(ß*)Ω Ur =ø. Da gjelder:
(a) f(0)"V(0) = EG;r(0)
(b) (Aa)(aêOn –> f(a): V(a) –(1-1,på)–> EG;r(a))
(c) (Aa)(Ab)(a,b êOn & a≤b –> Rest(f(a),V(b))= f(b))

Bevis: Vi setter per definisjon om aêOn:

C(a) = f(a) : V(a) –(1-1,på)–> EG;r(a) & (Ab)(b≤a –> Rest(f(a),V(b)) =f(b)).

For å bevise satsen vil det være tilstrekkelig å vise:

(+) (Aa)(aêOn –> C(a))

Punkt (b) og (c) i teoremet følger da direkte fra (+). Punkt (a) følger fra C(0) som i sin tur selvfølgelig følger fra (+). Påstanden (+) bevises ved induksjon på On. Dette gjøres under punkt (i) – (iii) nedenfor.

(i) Det er lett å se ved hjelp av definisjonen av f(a) at C(0) holder. Dette følger fordi V(0) = Ur = EG;r(0) og fordi Rest(Id,Ur): Ur –(1-1,på)–> Ur.

(ii) Anta aêOn og at (1.0) (Ab)(b≤a –> C(b)). Målet er å vise at C(a+1). Dette gjøres under (A) – (F) nedenfor.

(A) Man må først vise at (1) Dom(f(a+1))=V(a+1). Først bevises inklusjonen mot venstre. Anta for vilkårlig x at (2) xêV(a+1). Da har man
(3) xêV(a)UPt(V(a)). Man sondrer først mellom to hovedtilfelle.

Tilfelle (a): (3.1) xêV(a). I dette tilfelle er det nødvendig å skille mellom to undertilfeller alt ettersom man har M(x) eller ikke. Tilfelle (a1): ¬M(x). I så fall har man xêUr. Det følger da at xêDom(f(0)). Men fra definisjonen av f følger da xêDom(f(a+1)). Satsen holder derfor i dette tilfelle. Tilfelle (a2): M(x). Fra (3.1) og Teorem 46 følger da (4) x Inkl V(a). Nå har man fra induksjonshypotesen at:

(5) V(a) = Dom(f(a)). Fra (4) og (5) følger :

(6) x Inkl Dom(f(a))

Siden M(x) og f(a) ifølge induksjonshypotesen er en funksjon har man fra (6) og substitusjonsaksiomet at (7) M(f(a) ‘‘x). Nå har man f(a) ‘‘x= Mg(f(a)‘r : rêx). Dette , (7) og definisjonen av ß* impliserer eksistensen av y der

y= ß*(Mg(f(a)‘r : rêx)). Da har man åpenbart at <x,y>êf(a+1) og følgelig at xêDom(f(a+1)).

Tilfelle (b) xêPt(V(a)). Da x Inkl V(a) & M(x). Som ovenfor følger ved hjelp av induksjonshypotesen at x Inkl Dom(f(a)) = V(a). Det følger også at f(a)‘‘x er en mengde. Da må det imidlertid finnes noe y som er slik at

y = ß*(f(a) ‘‘x) = ß*(Mg(f(a)‘r: rêx)

Fra dette og definisjonen av f(a+1) følger så xêDom(f(a+1)).

Dette viser at inklusjonen mot venstre i (1) holder.

La oss dernest gi et bevis for inklusjonen mot høyre i (1). Anta for vilkårlig x at xêDom(f(a+1)). Det finnes da y slik at <x,y>êf(a+1). Dette innebærer at det enten finnes z der (8) zêPt(V(a)) & x=z & y=ß*(Mg(f(a)‘r: rêz)) eller at (9) <x,y>êf(0). I det første tilfellet har man at xêPt(V(a)) Inkl V(a+1). I det andre tilfellet har man at xêUr = V(0) Inkl V(a+1). I begge tilfelle holder altså det man ønsker. Dette gir en dermed et fullstendig bevis for (1).

(B) Det som nå vil bli bevist er at (1) f(a) Inkl f(a+1) under forutsetning av at induksjonshypotesen holder. Anta derfor at (2) <x,y>êf(a) for vilkårlige x og y. Da har man ved hjelp av induksjonshypotesen at xêDom(f(a) = V(a) og derfor at (3) xêV(a). Man må nå sondre mellom to tilfelle:

Tilfelle (a): ¬M(x). I så fall har man (4) xêUr. Nå har man at følgende holder:

(Q1) For alle aêOn og for alle x,y gjelder følgende:

(<x,y>êF(a) & ¬M(x))–> <x,y>êf(0)

La oss gi et bevis for dette. Anta for reduktio ad absurdum at det finne x,y,a slik at (5) <x,y>êf(a) & ¬M(x) & ¬(<x,y>êf(0)). Siden <x,y>êf(a) &¬M(x) finnes det et minste ordinaltall a som oppfyller denne betingelsen. Dette innebærer at det finnes et minste d;0 slik at (6) <x,y>êf(d;0) & ¬M(x) &d;0êOn. Da har man enten d;0êK;I eller d;0êK;II. I det første tilfelle har man i så fall enten d;0=0 eller d;0=π+1 for noe πêOn. Fra (6) ser man umiddelbart at tilfellet d;0=0 er utelukket. Har man d=π+1 følger: <x,y>êf(d;0)=f(π+1)= (dzêPt(V(π))) (ß*(Mg(f(π)‘r: rêz))). Men da følger xêPt(V(π))= Mg(z: M(z) & z Inkl V(π)). Herav M(x) som strider mot (6). Det er altså utelukket at d;0êK;I. Anta d;0êK;II. Da har man i lys av definisjonen av f at <x,y>êUN/c<d;0/(f(c)) og derfor <x,y>êf(c) for noe ordinaltall cêOn der c<d;0. Men dette og den andre konjunkten i (5) impliserer at det finnes et ordinaltall c som er mindre enn d;0 og hvor man har at (6) holder. Dette strider mot at d;0 skulle være det minste ordinaltall som oppfyllte denne betingelsen. I begge tilfelle får man en motsigelse. Dette innebærer at det ikke kan finnes x,y og a som oppfyller kravet (5). Fra dette følger så påstanden (Q1).

Fra (2), (4) og (Q1) følger nå (7) <x,y>êf(0). På dette punkt er det nødvendig å gi et bevis for den følgende sats:

(Q2) (Ab)(bêOn –> f(0) Inkl f(b))

Dette vises ved induksjon på On. Er b=0 er det åpenbart at satsen holder. Er b=π+1 følger satsen direkte fra definisjonen av f(π+1). Er bêK;II har man at f(b)=UN/d<b/(f(d)). Siden b i dette tilfelle må være større enn 0 har man 0<b og derfor åpenbart: f(0) Inkl UN/d<b/(f(d)) = f(b). Dette viser at (Q2) holder.

Siden a+1êOn følger fra (7) og (Q2) at <x,y>êf(a+1). Det har derfor blitt vist at påstanden (1) holder i det tilfelle at ¬M(x).

Tilfelle (b): M(x). Fra (3) har man at xêV(a). Det er klart at aêOn. Det følger fra dette at Δ= Mg(a: aêOn &xêV(a)) ≠ø og at det derfor må finnes et minste ordinaltall i Δ. Sett d;0=μa(xêV(a) &aêOn). Man må ha (9) d;0≠0 for ellers hadde man xêV(0)=Ur og derfor ¬M(x). Men dette er nå utelukket. Man kan heller ikke ha at d;0êK;II for i så fall har man xêV(d;0)= UN/c<d;0/(V(c)) og derfor at xêV(c) for noe ordinaltall c som er mindre en d;0. Dette strider mot (8). Det følger at d;0=π+1 for noe ordinaltall π, og derfor at (10) xêV(π+1)=v(π)UPt(V(π)). Da har man enten xêV(π) eller xêPt(V(π)). I det første tilfellet har man i lys av

Teorem 46 at x Inkl V(π). Det samme følger selvfølgelig også i det andre tilfellet. Man har derfor (11) xêPt(V(π)). Siden π<π+1=d;0≤a har man π<a. Fra dette og induksjonshypotesen følger (12) f(π) =Rest(f(a),V(π)). Fra (11) og (12) følger:

(13) f(π)‘‘x= f(a)‘‘x dvs. det samme som (14) Mg(f(π)‘r: rêx) = Mg(f(a)‘r: rêx) Siden man også fra induksjonshypotesen har at Func(f(π)) følger ved hjelp av substitusjonsaksiomet at

M(f(π)‘‘x) og at det derfor må finnes y;1 slik at y;1=ß*(f(π)‘‘x). Fra dette og (11) følger <x,y;1>êf(π+1)=f(d;0) Inkl f(a); igjen ved hjelp av induksjonshypotesen. Man har derfor (15) <x,y;1>êf(a). Nå har man siden xêV(a) at x Inkl V(a) og derfor xêPt(V(a)) siden x er en mengde. Siden f(a) etter induksjonshypotsen er en funksjon følger at f(a)‘‘x er en mengde og at det derfor finnes y;2 der (16) y;2=ß*(f(a)‘‘x) & xêPt(V(a)). Da har man (17) <x,y;2>êf(a+1) ved hjelp av definisjonen av f. Fra (15) og (2), samt induksjonshypotesen, kan man slutte (18) y=y;1 siden f(a) i så fall er en funksjon. Fra (14), (16) og det at y;1=ß*(f(π)‘‘x) følger (19) y;1=y;2. Fra (17), (18) og (19) følger så det man ønsker, nemlig <x,y>êf(a+1). Det har dermed blitt gitt et bevis for (1) holder under forusetning av at induksjonshypotesen holder.

(C) Det vil nå bli bevist at f(a+1) er en funksjon om induksjonshypotesen holder. Anta for vilkårlige objekter x,y;1 og y;2 at:

(1) <x,y;1>,<x,y;2>êf(a+1)

Da har man ved hjelp av definisjonen av f at:

(2) <x,y;1>ê (dzêPt(V(a)))(ß*(Mg(f(a)‘r: rêz)) Uf(0)

(3) <x,y;2>ê (dzêPt(V(a)))(ß*(Mg(f(a)‘r: rêz)) Uf(0)

Da har man enten <x,y;1>,<x,y;2>êf(0), og i så fall y;1=y;2 i kraft av definisjonen av f(0). Eller så har man:

<x,y;1>,<x,y;2>ê (dzêPt(V(a)))(ß*(Mg(f(a)‘r: rêz))

Dette innebærer at det finnes v;1,v;2 slik at:

y;1=ß*(Mg(f(a)‘r: rêv;1) & x=v;1 & v;1êPt(V(a))

y;2=ß*(Mg(f(a)‘r: rêv;2) & x=v;2 & v;2êPt(V(a))

Men fra dette følger åpenbart y;1=y;2. Merk at man ikke kan ha (4) <x,y;1>ê (dzêPt(V(a)))(ß*(Mg(f(a)‘r: rêz)) og (5) <x,y;2>êf(0) (eller omvendt). For fra (4) følger xêPt(V(a)) og da M(x) & x Inkl V(a). Men fra (5) følger xêUr og følgelig ¬(M(x)). Dette tilfellet er derfor utelukket.

(D) Det er også nødvendig å vise at f(a+1) er en-entydig gitt induksjonshypotesen. Anta derfor at:

(1) <x;1,y>,<x;2,y>ê(dzêPt(V(a)))(ß*(Mg(f(a)‘r: rêz)) Uf(0)

Da er det siden vi etter forutsetningene i teoremet har Rgn(ß*)ΩUr=ø bare to muligheter: Den ene muligheten er at <x;1,y>,<x;2,y>êf(0). Da har man f(0)=Rest(Id,Ur) og derfor at x;1=x;2. Den andre muligheten er at

<x;1,y>,<x;2,y>ê(dzêPt(V(a)))(ß*(Mg(f(a)‘r: rêz))

Da har man x;1,x;2êPt(V(a)) og ß*(Mg(f(a)‘r: rêx;1)) = y = ß*(Mg(f(a)‘r: rêx;2))

Men siden ß* er en-entydig følger da: Mg(f(a)‘r: rêx;1)=Mg(f(a)‘r: rêx;2)

Anta for reduktio ad absurdum at x;1≠x;2. Da har man at det finnes noe s der sêx;1&¬(sêx;2) eller at det finnes s der ¬(sêx;1) & sêx;2. Det er bare nødvendig å føre beviset i det ene tilfellet, siden beviset i det andre tilfellet kan føres på en helt analog måte. Anta derfor at det finnes s der sêx;1 & ¬(sêx;2). Siden x;1,x;2êPt(V(a)) følger at x;1,x;2 Inkl V(a). Nå har man i følge induksjons-hypotesen at V(a)=Dom(f(a)). Det følger at sêx;1 Inkl V(a) og derfor sêDom(f(a)). Herav (f(a)‘s)êMg(f(a)‘r: rêx;1). Da f(a)‘s= f(a)‘r;1 for noe r;1êx;2. Siden f(a) etter induksjonshypotesen er en-entydig har man s=r;1êx;2 som strider mot at ¬(sêx;2). Dette gir en en motsigelse og viser at x;1=x;2. Dermed er en-entydigheten til f(a+1) bevist.

(E) Det er også nødvendig å vise at f(a+1) er på EG;r(a+1), dvs. at (1) Rgn(f(a+1)) = EG;r(a+1). Vi viser først inklusjonen mot høyre. Anta for vilkårlig x at xêRgn(f(a+1)). Da finnes det y slik at <y,x>êf(a+1). I lys av definisjonen av f innebærer dette:

<y,x>ê(dzêPt(V(a)))(ß*(Mg(f(a)‘r: rêz)) Uf(0)

Er <y,x>êf(0) har man xêUr=EG;r(0) Inkl EG;r(a+1). Er på den annen side

<y,x>ê(dzêPt(V(a)))(ß*(Mg(f(a)‘r: rêz)) har man for noe y at

x=ß*(Mg(f(a)‘r: rêy) & yêPt(V(a)). Da har man y Inkl V(a)=Dom(f(a)) i lys av induksjonshypotesen og derfor Mg(f(a)‘r: rêy) inkl EG;r(a). Det siste følger også ved hjelp av induksjonshypotesen. Men fra dette og Lemma 50.1 følger:

x= ß*(Mg(f(a)‘r: rêy) êEg;r(EG;r(a)) Inkl EG;r(a+1).

Vi viser så inklusjonen mot venstre i (1). Anta xêEG;r(a+1). Da har man xêEG;r(a)UMg(ß*(x): M(x) & x Inkl EG;r(a)). Er xêEG;r(a) har man ifølge induksjonshypotesen at det finnes qêV(a) der f(a)‘q=x. Da <q,x>êf(a) Inkl f(a+1) siden f(a) Inkl f(a+1) i lys av det som ble vist ovenfor under (B). Det følger at (Eq)(<q,x>êf(a+1)) og derfor at xêRgn(f(a+1)).

Er på den annen side x=ß*(y) for noe y der M(y) & y Inkl EG;r(a) har man ifølge induksjonshypotesen at f(a) : V(a) –(1-1-,på)–> EG;r(a). Det følger da at (f(a);-1)‘‘y InklV(a) & M((f(a);-1)‘‘y) ved hjelp av substitusjonsaksiomet. Man har videre at f(a)‘‘((f(a);-1)‘‘y) =y og derfor at:

x= ß*(Mg(f(a)‘r: rê(f(a);-1)‘‘y) & ((f(a);-1)‘‘y)êPt(V(a))

Da <(f(a);-1)‘‘y,x>êf(a+1). Det følger at xêRgn(f(a+1)). Dermed har det blitt gitt et fullstendig bevis for (1).

(F) Endelig må man bevise:

(1) (Ab)(b≤(a+1) –> Rest(f(a+1),V(b)) = f(b))

Er b=(a+1) er saken klar siden satsen da følger fra det at Dom(f(a+1))= V(a+1) som vi nå har bevist. Anta derfor (2) b<(a+1) og at <x,y>êRest(f(a+1),V(b)). Da har man xêV(b) & <x,y>êf(a+1). Ifølge induksjonshypotesen har man V(b)=Dom(f(b)). Det må derfor finnes y;0 slik at <x,y;0>êf(b). Nå har man, igjen ved hjelp av induksjonshypotesen, at f(b) Inkl f(a) for alle b≤a. Derfor <x,y;0>êf(a). Men fra (B) ovenfor har man da <x,y;0>êf(a) Inkl f(a+1) og fra (C) fremgår det at f(a+1) er en funksjon. Man har følgelig at y=y;0 og derfor at <x,y>êf(b). Det som så langt har blitt bevist er at Rest(f(a+1),V(b)) Inkl f(b). Siden b<(a+1) har man imidlertid ved hjelp av induksjonshypotesen og resultatet som ble vist under punkt (B) at f(b) Inkl f(a) Inkl f(a+1). Dette viser at Rest(f(a+1),V(b))= f(b).

Det har nå blitt vist at C(a+1) holder om (Ab)(b≤a –> C(b)). Man må imidlertid også vise at C(a) holder der aêK;II forutsatt at C(b) holder for alle ordinaltall b der b<a. Dette vil bli gjort under punkt (iii) nedenfor:

(iii) Anta (+) aêK;II & (Ab)(b<a –> C(b)). Vi tar sikte på å bevise C(a). Dette vil bli gjort under punktene (A') - (F') nedenfor:

(A') Det er nødvendig å vise at Dom(f(a) = V(a). Anta xêDom(f(a)). Da har man <x,y>êf(a) = UN/b<a/(f(b)) for noe y. Det følger at <x,y>êf(b) og derfor i følge induksjonshypotesen xêDom(f(b)) = V(b). Nå har man

V(b) Inkl UN/b<a/(V(b)) = V(a)

Derfor xêV(a). Er på den annen side xêV(a) har man xêV(b) for noe b<a. Ved hjelp av induksjonshypotesen har man da xêV(b)=Dom(f(b)) og derfor <x,y>êf(b) Inkl UN/b<a/(f(b)) = f(a) for noe y. Det følger at xêDom(f).

(B') Det er også nødvendig å vise at Func(f(a)). Anta derfor <x,y;1>,<x,y;2>êf(a). Da må det finnes b;1,b;2 slik at b;1,b;2<a og hvor man har: <x,y;1>êf(b;1) & <x,y;2>êf(b;2). Fra induksjonshypotesen følger at <x,y;1>,<x,y;2>êf(Max(b;1,b;2)) og at Func(f(Max(b;1,b;2)). Det følger at y;1=y;2.

(C') Man må også gi bevis for at f(a) er en-entydig. Anta <x;1,y>,<x;2,y>êf(a). D finnes det b;1,b;2êOn der b;1,b;2<a og hvor man har:

<x;1,y>êf(b;1) & >x;2,y>êf(b;2). la d=Max(b;1,b;2). Da <x;1,y>,<x;2,y>êf(d) ved hjelp av induksjonshypotesen. I følge denne vil også f(d) være en-entydig siden d<a. Det følger herav at x;1=x;2.

(D') Vi skal vise at Rgn(f(a))=EG;r(a). Anta xêEG;r(a). Da har man xêEG;r(b) for noe bêOn der b<a. Ifølge induksjonshypotesen har man da xêRgn(f(b)) som impliserer at <y,x>êf(b) Inkl UN/b<a/(f(b))=f(a) for noe y. Men da xêRgn(f(a)). Er på den annen side xêRgn(f(a)) har man for noe y at <y,x>êf(a). Dette impliserer at <y,x>êf(b) for noe bêOn der b<a. Ved hjelp av induksjonshypotesen følger da: xêEG,r(b) Inkl UN/c<a/(EG;r(c))=EG;r(a).

(E') Helt tilslutt er det også nødvendig å bevise riktigheten av:

(+) (Ab)(b≤a –> Rest(f(a),V(b)) = f(b))

Er b=a må man vise at Rest(f(a),V(a)) =V(a). Men dette holder i lys av (A') siden vi der viste at Dom(f(a))=V(a) om aêK;II. Anta derfor at b<a og at <x,y>êRest(f(a),V(b)). Da har man at det finnes b;1 der b;1êOn & b;1<a og der <x,y>êf(b;1) & xêV(b). Man må skille mellom tre tilfeller: (a) b=b;1 Da er <x,y>êf(b) og saken er klar. (b) b;1<b. Da har man ved hjelp av induksjonshypotesen at f(b;1) Inkl f(b) og derfor at <x,y>êf(b). (c) b;1>b. Etter induksjonshypotesen har man at Rest(f(b;1),V(b))= f(b) og derfor <x,y>êf(b). I alle tilfelle har man <x,y>êf(b). Det har nå blitt vist at Rest(f(a),V(b)) inkl f(b). Er imidlertid b<a har man f(b) Inkl UN/c<a/(f(c))=f(a) & Dom(b) =V(b). Det følger i så fall at f(b) Inkl Rest(f(a),V(b)). Dette viser at Rest(f(a),V(b)) = f(b). Dette avslutter beviset for (+).

Men dermed er også beviset for Teorem 51 fullført. **QED.**

Vi har nå nådd til veis ende og kan sies å ha gjennomført det projektet som ble satt opp ved begynnelsen av dette arbeid. Dette projekt var å gi bevis for alle de teoremene som ble eksplisitt formulert i "Egenskaper. Del I". Dette har nå blitt gjort.

****

APPENDIX I

Appendix I

§1 Fra Teorem 51 i §16 tatt isolert og innført på den måten som det gjøre der, kan man ikke umiddelbart se hvilken betydning dette teoremet har. For at dette skal gå tydeligere frem definerer vi to relasjoner E og H;a der aêOn på den følgende måte:

(1) E = Mg(<x,y>: xêy)
(2) H;a = Mg(<x,y>: xêEG;r(a) & yêEG;r(a)-Ur &
(Aw)(wêI –> xêEkst;w(y)))

Fra (1) er man at E rett og slett er medlemskapsrelasjonen og at H;a er den tilsvarende relasjon mellom individene i universet av rigide egenskaper opp til a. Er xêEG;r(a) og yêEG;r(a)-Ur ser man at xH;ay holder hvis og bare hvis x er med i ekstensjonen til y i alle verdener, mao. hvis og bare hvis x har egenskapen y i alle verdener.

Betydningen til Teorem 51 ligger nå i dette at vi ved hjelp av dette teorem kan vise at dersom Rgn(ß)ΩUr=ø så gjelder det at f(a), slik som denne funksjonen ble definert ved (+ +) i §16 er en isomorfi mellom de to relasjonelle strukturene <V(a),EΩProd(V(a),V(a))> og <EG;r(a),H;a> for alle aêOn.*

Det er dette forhold som kan berettige en i å si at elementene i V(a) kan representeres ved dem i EG;r(a) og som dessuten viser at vi ved konstruksjonen av f(a) ikke bare har konstruert en funksjon som viser at V(a) og EG;r(a) er likemektige for alle aêOn.

Den isomorfipåtanden som har blitt antydet ovenfor kan nå formuleres som et eget teorem på den følgende måte:

Teorem 51.1 (E;3) (Isomorfi-sats)
Anta Rgn(ß*)ΩUr=ø og at f(a) er definert ved transfinit induksjon slik:

(i) f(0) = Rest(Id, Ur) = Mg(<x,x>: xêUr)
(ii) f(a+1) = f(0) U Mg(<z, ß*(Mg(f(a)‘y: yêz)>: zêPt(V(a)))
(iii) f(a) = UN(Mg(f(b): b<a)) om bêK;II

Anta E og H;a for aêOn er definert ved:

(iv) E = Mg(<x,y>: xêy)
(v) H;a = Mg(<x,y>: xêEG;r(a) & yêEG;r(a)-Ur &
(Aw)(wêI –> xêEkst;w(y)))

Anta aêOn. Da gjelder det at f(a) er en isomorfi mellom <V(a),EΩProd(V(a),V(a))> og <EG;r(a),H(a)>. Mao. har man
(a) f(a) : –(1-1,på)–> EG;r(a)
(b) Er x,yêV(a) gjelder: xêy <–> f(a)‘x H;a f(a)‘y

La oss gi et bevis for denne påstand:

Bevis: Ad (a). Dette følger umiddelbart fra forutsetningene og Teorem 51. Noen ytterligere kommentarer skulle derfor strengt tatt ikke være nødvendige her.

Ad (b). Anta x,yêV(a). Da er yêV(a) og det må finnes et minste ordinaltall d;0 slik at yêV(d;0). Vi studerer to hovedtilfeller:

Tilfelle A. M(y). Antar man da at d;0=0 har man at yêV(0)=Ur og derfor at ¬M(y) som er umulig. Antar man at d;0êK;II har man at yêUN/c<d;0/(V(c)) og derfor at yêV(c) for noe ordinaltall c<a. Men dette strider mot at d;0 skulle være det minste ordinaltallet a der yêV(a). Det følger at d;0êK;I og derfor at d;0 = (π+1) for noe πêOn. Da har man: yêV(d;0)= V(π+1)= V(π)U Pt(V(π)). Er nå yêV(π) er dette igjen utelukket siden π<d;0 og d;0 skulle være det minste ordinaltallet q der yêV(q). Det følger derfor at yêPt(V(π)). Ved hjelp av definisjonen av <f(a)>/aêOn/ har man :

(1) f(π+1)‘y= ß*(f(π)‘‘y)= ((q;1);-1)(Mg(<w,f(π)‘‘y>: wêI))

Fra dette følger: (2) (Aw)(wêI –> Ekst;w(f(π+1)‘y) = f(π)‘‘y)

(I) Anta nå at (3) xêy. da har man (f(π)‘x)êMg(f(π)‘s: sêy) = f(π)‘‘y. Ved hjelp av (2) følger da (4) (Aw)(wêI –> (f(π)‘x)êEkst;w(f(π+1)‘y)). Nå har man ved hjelp av Teorem 51, siden π<(π+1)≤a at f(π)‘x = f(a)‘x og f(π+1)‘y = f(a)‘y. Fra dette og (3) følger: (5) (Aw)(wêI –> (f(a)‘x)êEkst;w(f(a)‘y)). Herav har man i kraft av definisjonen av H;a at f(a)‘x H;a f(a)‘y. Dette følger fordi f(π+1)(y) = ß*(f(π)‘‘y) og Rgn(ß*)Ω Ur=ø og dessuten f(a)‘y = f(π+1)‘y. Da kan man ikke ha (f(a)‘y)êUr.

(II) Anta (6) ¬(xêy). Da har man (7) ¬(f(a)‘xê Mg(f(π)‘s: sêy). For var det motsatte tilfelle ville man ha f(a)‘x= f(π)‘(s;1) for noe s;1êy. Siden π≤a har man at f(π) Inkl f(a) (Jmf. Teorem 51) og derfor f(π)‘(s;1)= f(a)‘(s;1). Da f(a)‘x = f(a)‘(s;1). Siden f(a) er en-entydig ifølge Teorem 51 følger x=s;1. Siden s;1êy ville man i så fall ha xêy som strider mot forutsetningen at ¬(xêy). (7) må derfor holde. Nå har man, om wêI, at Mg(f(π)‘s: sêy) =f(π)‘‘y= Ekst;w(f(π+1)‘y) . Det følger at det finnes wêI der ¬(f(a)‘xê Ekst;w(f(π+1)‘y)). Dette innebærer at:

¬(Aw)(wêI –> f(a)‘xêEkst;w(f(π+1)‘y))

herav har man så ved hjelp av definisjonen av H;a at ¬(f(a)‘x H;a f(a)‘y) siden f(π+1)‘y = f(a)‘y.

Tilfelle B. ¬M(y). Da har man ifølge mengdeaksiomet at (8) ¬(Ex)(xêy). (Merk at mengdeaksiomet er formelen (Ax)(Ay)(xêy –> M(x)). Dette er et aksiom i det underliggende mengdeteoretiske systemet ZFCu(L,e). Se Rognes [1]) Videre har man at yêUr og derfor at f(a)‘y= f(0)‘y=y. Anta nå for reduktio ad absurdum at f(a)‘x H;a f(a)‘y. Da har man fra definisjonen av H;a at:

f(a)‘y = f(0)‘y =yêEG;r(a)–Ur.

Men dette er umulig. Man har derfor at (9) ¬(Ex)(x H;a f(a)‘y). Fra (6) og (9) følger det at xêy <–> f(a)‘x H;a f(a)‘y.

Påstanden holder altså hva enten man har M(y) eller ¬M(y). Dette avslutter beviset for Teorem 50.1. **QED.**

§2 Det er mulig å trekke mer ut av Teorem 51 enn bare det isomorfi-teoremet som det ble gitt bevis for rett ovenfor. La F være unionen av de diverse f(a) ettersom a gjennomløper On, og la V og EG;r være henholdsvis unionen av de forskjellige V(a) og EG;r(a) ettersom a gjennomløper On. Da kan man ved hjelp av Teorem 51 også vise at F er en isomorfi mellom <V,E> og <EG;r,H> forutsatt at Rgn(ß*)ΩUr=ø oh H defineres ved:

H = Mg(<x,y>: xêEG;r & yê(EG;r-Ur) & (Aw)(wêI –> xêEkst;w(y)))

Denne påstanden kan formuleres presist slik:

Teorem 51.2 Anta Rgn(ß*)Ω Ur =ø og at <f(a)>/aêOn/ er definert som i Isomorfisatsen, dvs. Teorem 51.1. Sett:

F = UN(Mg(f(a): aêOn))
V = UN(Mg(V(a): aêOn))
EG;r = UN(Mg(EG;r(a): aêOn)

La videre E være definert som i Isomorfi-satsen, men la H være definert ved:

H = Mg(<x,y>: xêEG;r & yê(EG;r-Ur) & (Aw)(wêI –> xêEkst;w(y)))

Da gjelder:

(a) F: V –(1-1,på)–> EG;r
(b) x,yêV –> (xêy <–> F(x) H F(y))

Det bemerkes at V, F, EG;r, E og H i dette teoremet ikke er mengder. Dette innebærer at det ikke dreier seg om entiteter som dukker opp på et eller annet nivå i det kumulative mengde-hierarki. Dette i motsetning til entitetene V(a), f(a), EG;r(a), EG(a) og H;a som er mengder for hvert aêOn. Mao. er V, F, EG;r, E og H det som av Takeuti i Takeuti [1] kalles for "proper classes".

Bevis: *Ad(a)*. For å levere et fullstendig bevis for denne påstanden må følgende fire påstander etableres:

(1) Dom(F)=V
(2) Rgn(F) = EG;r
(3) Func(F)
(4) Func(F;-1)

Det vil bli gitt bevis for disse påstandene i den rekkefølge de er oppført:

Ad (1). Anta for vilkårlig x at xêDom(F). Da har man <x,y>êF for noe y og derfor i lys av definisjonen av F at <x,y>êf(a) for noe aêOn. Da følger ved hjelp av Teorem 51 at xêDom(f(a)) = V(a) og følgelig at xêV(a) Inkl V. Anta på den annen side at xêV for vilkårlig x. Da har man xêV(a)=Dom(f(a)) for noe ordinaltall aêOn i følge Teorem 51. Dette innebærer at man for en eller annen entitet y må ha <x,y>êf(a) Inkl F, og derfor at xêDom(F). Dette viser at (1) holder.

Ad (2). Anta for vilkårlig x at xêRgn(F). Da finnes y slik at <y,x>êF. Etter definisjonen av F finnes det da aêOn slik at <y,x>êf(a). Da har man xêRgn(f(a))=EG;r(a) Inkl EG;r. Er på den annen side xêEG;r har man at xêEG;r(a)=Rgn(f(a)) for noe aêOn. Da <y,x>êf(a) Inkl F for noe y. Dette impliserer så at xêRgn(F). Dette viser at (2) holder.

Ad (3). Anta <x,y;1>,<x,y;2>êF for vilkårlige objekter x,y;1 og y;2.Da har man i lys av definisjonen av F at det må finnes b;1,b;2 slik at <x,y;1>êf(b;1) og <x,y;2>êf(b;2). La d=Max(b;1,b;2). Ved hjelp av Teorem 51 har man da <x,y;1>,<x,y;2>êf(d). Men Func(f(d)). Det følger at y;1=y;2.

Ad (4). Anta man på den annen side at <x;1,y>,<x;2,y>êf har man igjen ved hjelp av definisjonen av F at det må finnes b;1.b;2êOn som er slik at <x;1,y>êf(b;1) og <x;2,y>êf(b;2). Sett d=Max(b;1,b;2). Da har man dêOn og i lys av Teorem 51 må man ha at <x;1,y>,<x;2,y>êf(d). Fra Teorem 51 følger videre at f(d) er en-entydig og det følger derfor at x;1=x;2.

Dermed har det blitt levert et fullstendig bevis for punkt (a).

Ad (b). Anta (0) x,yêV. Da finnes b;1,b;2êOn slik at xêV(b;1) & yêV(b;2). Sett d=Max(b;1,b;2). Da har man dêOn og man må også ha at x,yêV(d). Fra forutsetningene i teoremet og Teorem 51.1 følger:

(1) xêy <–> f(d)‘x H;d f(d)‘y

Siden xêV(d) har man xêV(d) = Dom(f(d)) (Jmf. Teorem 51) og derfor at det finnes z slik at <x,z>êf(d) Inkl F. Siden f(d) og F er funksjoner har man da:

(2) z=f(d)‘x = F(x). På tilsvarende vis innser man at (3) f(d)‘y = F(y).

(A) Anta xêy. Fra (1) – (3) følger da F(x) H;d F(y). Fra dette og definisjonen av H;d følger:

(4) F(x)êEG;r(d) & F(y)ê(EG;r(d) – Ur) & (Aw)(wêI –> F(x)êEkst;w(F(y)))

Men fra de to første konjunktene i (4) følger F(x)êEG,r og F(y)ê(EG,r–Ur) som sammen med den siste konjunkten og definisjonen av H impliserer
F(x) H F(y).

(B) Anta (7) F(x) H F(y). Fra (7) og definisjonen av H følger:
(8) F(x)êEG;r & F(y)ê(EG;r –Ur). Dessuten følger:

(9) (Aw)(wêI –> F(x)êEkst;w(F(y)))

I lys av (2) og (3) har man at F(x)= f(d)‘x & F(y) = f(d)‘y. Videre har man x,yêV(d). Det følger at (10) (f(d)‘x)êEG;r(d) & (f(d)‘y)ê(EG;r(d) – Ur) siden man i lys av Teorem 51 har f(d) : V(d) –(1-1,på)–>EG;r(d). Fra (9) samt det at F(x)= f(d)‘x og F(y) = f(d)‘y følger (11) (Aw)(wêI –> f(d)‘x êEkst;w(f(d)‘y)). Fra (10), (11) og definisjonen av H;d følger f(d)‘x H;d F(d)‘y . Dette og (1) impliserer så xêy. Det har nå blitt vist at xêy <–> F(x) H F(y).

Dette avslutter beviset for Teorem 51.2. **QED.**

§3 Det er en del bemerkninger som kan gjøres i forbindelse med forbeholdet om at (1) Rgn(ß*) Ω Ur =ø. Dette er som man ser en av forutsetningene i Teorem 51. Først minnes det om at ß*er den funksjonen som til enhver mengde x tilordner det rigide attributtet hvis ekstensjon i hver mulig verden er mengden x. Man har derfor at alle elementene i Rgn(ß*) er rigide attributter:

(2) Rgn(ß*) Inkl Mg(x: At;1(x) &
(Ea)(M(a) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(x) =a)))

Man legger også merke til at det omvendte gjelder, er mao. r et rigid attributt vil det alltid finnes en mengde x slik at x er ekstensjonen til r i alle mulige verdener. Dette innebærer at inklusjonen også holder den andre veien i (2) slik at man har (3) Rgn(ß*) = Rig om "Rig" betegner klassen av alle rigide attributter. Man ser fra dette at forbeholdet (1) innebærer at ingen av de rigide attributtene er urindivider.

Nå er det minst to ting som kan bemerkes til dette. For det første kan man si at denne at denne antagelsen ikke virker helt innlysene. På mange måter virker det intuitivt sett ikke helt urimelig å si at attributter ikke er mengder og derfor at de rigide attributtene heller ikke er det. Hvis man derfor ønsker å holde konsekvent fast ved dise intuisjonene kan man ikke se seg tilfreds med (1). Men det må da gjøres oppmerksom på at man heller ikke kan si seg tilfreds med E;3 siden denne teori impliserer at visse attributter, rigide såvel som ikke-rigide, alltid tvinges til å være mengder uansett hvor rikholdig mengden av urindivider tenkes å være. I det minste gjelder dette så lenge man fastholder våre mengdeteoretiske aksiomer inkludert det vi kalte urmengdeaksiomet.

For det andre vil vi bemerke at forbeholdet (1) ikke desto mindre er konsistent med E;3. Dette innebærer at om E;3 utvides med (1) som et nytt ikke-logisk aksiom kan man vise at den utvidete teorien er konsistent om E;3 er det. Det er ikke så vanskelig å innse dette fordi den intepretasjonsfunksjonen som vi brukte i forbindelse med konsistensbeviset for E;3 også avbilder (1) på et teorem i T;1.

Man ser at Teorem 51 sier at hvis (1) holder så er den funksjonen f(a) som ble definert ved (++) i §16 I Del II en en-entydig avbildning mllom V(a) og EG;r(a) for alle aêOn. Med andre ord har man:

f(a) : V(a) –(1-1-,på)–> EG;r(a)

Det man nå kan spørre om er om dette holder om vi sløyfer dette forbeholdet. Svaret er benektende. For å godtgjøre dette gir vi et bevis for den følgende sats:

Teorem 51.3 (E;3) Anta f(a) for aêOn er induktivt definert ved:
(i) f(0) = Rest(Id, Ur) = Mg(<x,x>: xêUr)
(ii) f(a+1) = f(0) U Mg(<z, ß*(Mg(f(a)‘y: yêz)>: zêPt(V(a)))
(iii) f(a) = UN(Mg(f(b): b<a)) om bêK;II
Anta a Inkl Ur & M(x) & ß*(x)êx
Da har man:
¬(Aa)(aêOn –> f(a) : V(a) –(1-1,på)–> EG;r(a))

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder. Siden x Inkl Ur & M(x) og man dessuten har V(0)=Ur følger det at (1) xêPt(V(0)). Videre har man at det finnes y slik at (2) y=ß*(x). Nå har man at: (3) Mg(f(0)‘r:rêx) = Mg(r: rêx) =x siden x Inkl Ur og f(0) = Rest(Id,Ur). Det følger fra (2) og (3) at

(4) y = ß*(Mg(f(0)‘r:rêx))

Fra definisjonen av <f(a)>/aêOn/ følger videre:

(5) f(1) = f(0) U Mg(<z, ß*(Mg(f(0)‘y: yêz)>: zêPt(V(0)))

Fra (1), (2), (3) og (5) følger så (6) f(1)‘x = ß*(x). Sett e(0) = ß*(x). Da har man i lys av forutsetningene i satsen at e(0)êx Inkl Ur og derfor at f(0)‘(e(0))=e(0). Siden e(0)êUr har man ¬(e(0)êPt(Ur)) og da har man ifølge definisjonen av f(1) at

(7) f(0)‘(e(0)) = f(1)‘(e(0)) = e(0). Fra (6) og (7) følger (8) f(1)‘(e(0)) = f(1)‘x. Men xêPt(Ur) & ¬(e(0)êPt(Ur)). Da x≠e(0). Fra dette og (8) følger:

¬(f: V(1) –(1-1,på)–> EG;r(1)). Men da :

¬(Aa)(aêOn –> f(a): V(a) –(1-1,på)–> EG;r(a)). **QED.**

La oss kalle teorem 51 minus forbeholdet Rgn(ß*) ΩUr=ø for T51–. Fra teoremet ovenfor følger det at hvis man kunne vise T51– i E;3 ville man også kunne vise at den følgende formel er et teorem i E;3, nemlig ¬P der P er:

(Ex)(x Inkl Ur & M(x) & ß*(x)êx)

Men P kan sannsynligvis legges til E;3 uten at motsigelser oppstår. I så fall kan ikke T51– utledes i E;3.

tuderer man beviset for Teorem 51 er man at forbeholdet Rgn(ß*)ΩUr =ø bare blir brukt på et punkt i beviset, nemlig når man skal vise at f(a) er en-entydig. Sløyfer vi derfor det som står i avsnittene (D) og (C') i beviset for Teorem 51 i Del II skulle det man står igjen med i hovedsaken utgjøre et bevis for:

Teorem 51.4 (E;3) Anta f(a) der aêOn er induktivt definert ved:
(i) f(0) = Rest(Id, Ur) = Mg(<x,x>: xêUr)
(ii) f(a+1) = f(0) U Mg(<z, ß*(Mg(f(a)‘y: yêz)>: zêPt(V(a)))
(iii) f(a) = UN(Mg(f(b): b<a)) om bêK;II
Da gjelder:
(a) f(0)"V(0) = EG;r(0)
(b) (Aa)(aêOn –> f(a): V(a) – på–> EG;r(a))
(c) (Aa)(Ab)(a,b êOn & a≤b –> Rest(f(a),V(b))= f(b))

§4 Vi vil tilslutt også nevne noen teoremer som det er naturlig å sammenligne med Teorem 51, men som ikke inneholder noen spesielle forutsetninger om Rgn(ß*).

Vi definerer EG;r(X,a) og V(X,a) som er henholdsvis det kumulative hierarki av rigide attributter opp til nivå a relativt til X og det kumulative hierarki av mengder opp til nivå a relativt til X, der M(X) og aêOn ved de følgende definisjoner:

D1 (i) EG;r(X,0) = X
(ii) EG;r(X,a+1) = EG;r(X,a) U Eg;r(EG;r(X,a))
(iii) EG;r(X,a) = UN/b<a/(EG;r(X,b)) om bêK;II

Tilsvarende defineres "V(X,a)" slik:

D2 (i) V(X,0) = X
(ii) V(X,a+1) = V(X,a) U Pt(V(X,a))
(iii) V(X,a) = UN/b<a/(V(X,b)) om bêK;II

Fra disse definisjonene ser man at V(Ur,a)=V(a) og at EG;r(Ur,a)=EG;r(a) om aêOn.

Videre defineres i analogi med den tidligere innførte funkjsonsfamilie <f(a)>/aêOn/ en familie av funksjoner f(X,a) der det forutsettes at X er en mengde og aêOn på den følgende måte:

D3 (i) f(X,0) = Rest(Id, X) = Mg(<x,x>: xêX)
(ii) f(X,a+1) = f(X,0) U Mg(<z, ß*(Mg(f(X,a)‘y: yêz)>: zêPt(V(a)))
(iii) f(X,a) = UN(Mg(f(X,b): b<a)) om bêK;II

Man ser nå at i lys av definisjonene D1 –D3 har man at f(Ur,a) = f(a) om aêOn, forutsatt at f(a) er definert på samme måte som tidligere.

Gitt definisjonene D1 –D3 kan man utlede den følgende sats hvor beviset sløyfes:

Teorem 51.5 (E;3) Anta X;0= (Ur-Mg(x: At;1(x)))
Da gjelder:
(a) f(X;0,0)‘‘(V(X;0,0) = EG;r(X;0,0)
(b) (Aa)(aêOn –> f(X;0,a) : V(X;0,a) –(1-1,på)–> EG,r(X;0,a))
(c) (Aa)(Ab)(a,bêOn & b≤a –> Rest(f(X;0,a),V(X;0,b))= f(X;0,b))

Man kan også bevise den følgende, litt mer generelle sats som impliserer den foregående:

Teorem 51.6 (E;3) Anta X;0= (Ur-Mg(x: At;1(x))) og anta dessuten at M(z) & z Inkl X;0
Da gjelder:
(a) f(z,0)‘‘(V(z,0) = EG;r(z,0)
(b) (Aa)(aêOn –> f(z,a) : V(z,a) –(1-1,på)–> EG,r(z,a))
(c) (Aa)(Ab)(a,bêOn & b≤a –> Rest(f(z,a),V(z,b))= f(z,b))

Man ser at Teorem 51.5 frekommer fra Teorem 51.6 ved å la z være X;0, dvs. ved å instansiere med hensyn på X;0.

Man kan også i forbindelse med de relativiserte hierarkiene <V(X,a)>/aêOn/ og <EG;r(X,a)>/aêOn/ der X Inkl (Ur – Mg(x: At;1(x))) vise at f(X,a) er en isomorfi, dvs. man kan vise isomorfisatser av en type som er helt analoge med Teorem 51.1.

Tilslutt vil vi nevne et siste teorem som kan sammenlignes med Teorem 51 og som ytterligere kan bidra til å sette denne sats i et visst relieff. I stedet for å betrakte funksjonen f(a), eller de diverse f(X,a) som ble innført ovenfor, defineres en ny funksjon, g(a) for aêOn, på følgende vis:

D4 (i) g(0) = Rest(ß*,Pt(V(0)))
(ii) g(a+1) = (dzêPt(V(a+1)))(ß*((g(a)‘‘(z–Ur))U(zΩUr)))
(iii) g(a) = UN(Mg(g(b): b<a)) om aêK;II

Gitt denne definisjonen kan man så vise:

.Teorem 51.7 (E;3) Man har:
(a) g(0) : Pt(V(0)) –(1-1,på)–> Eg;r(EG;r(0))
(b) (Aa)(aêOn –> g(a) : Pt(V(a)) –(1-1,på)–> Eg;r(EG;r(a))
(c) (Aa)(Ab)(a,bêOn & b≤a –> Rest(g(a),V(b)) =g(b))

Dette er det siste teoremet som her nevnes i forbindelse med forsøket på å oppnå en bedre forståelse av Teorem 51.

APPENDIX II

Appendix II

§1 I det følgende tillegg skal vi formulere visse teoremer som innebærer at man under bestemte forutsetninger kan representere egenskaper ved hjelp av geometriske objekter.

Først vil vi kort redegjøre for den notasjonen vi vil benytte.

I det følgende betegner Reell klassen av de reelle tallene. "k","l","m","n",... etc. betegner naturlige tall i von Neumanns betydning. Dette innebærer at 0 er identisk med nullmengden og at ethvert tall, bortsett fra 0, er identisk med mengden av sine forgjengere. n+1 vil derfor være {0,1,2,...,n}. Er a en mengde betegner "a^n" mengden av alle funksjoner der domenet til funksjonen er mengden n og hvor verdiområdet er inkludert i a. Er a Inkl Pt(Reell^n) for noe n er a en mengde betegner "SN;n(a)" snittet av alle de elementene som inngår i a. SN;n er følgelig den operasjonen som til enhver mengde a Inkl Pt(Reell^n) tilordner objektet ANu(a). "c;n" er den operAsjonen som til hvert objekt xêPt(Reell^n) tilordner Reell^n–x, dvs. komplementet til x med hensyn på mengden Reell^n.

Reell^n representerer da klassen av alle n-tupler av reelle tall, mao. det n-dimensjonale evklidske rom. Gitt et fiksert koordinatsystem vil alle punktene i det intuitive n-dimensjonale evklidiske rom ha sine en-entydige korrelater i Reell^n. Dvs. at det til alle punktmengder i det n-dimensjonale rom svarer en-entydig visse delmengder av Reell^n. I detfølgende betegner "I" klassen av alle logisk mulige verdener og "D" betegner mengden av alle logisk mulige individer. A;n er, om nê(n-{ø}) klassen av alle n-ære egenskaper. Det bør bemerkes at uttrykket "n-ært attributt" i det følgende brukes fullstendig synonymt med uttrykket "n-ær egenskap".

Vi skal først formulere et teorem som sier at under visse forutsetninger finnes en isomorfi mellom Pt(Reell^(n+1)) og A;n.

For å kunne formulere forutsetningene i dette teoremet forholdsvis kompakt innfører vi den følgende definisjon:

Definisjon 1 Med en koordinatisering av <I,D> forstås et ordnet par <π;1,π;2> som oppfyller de følgende krav:

(i) π;1: I –(1-1,på)–>Reell og (ii) π;2: D–(1-1,på)–> Reell

Denne definisjonen innebærer at en koordinatisering av <I,D> er et par av funksjoner der den første funksjonen av bilder I en-entydig på Reell og hvor den andre funksjonen tilsvarende avbilder D en-entydig på Reell.

Finnes det koordinatiseringer av <I,D> i denne forstand? Dette kan diskuteres. Man ser lett fra definisjonen ovenfor at eksistensen av en koordinatisering av <I,D> er ekvivalent medden påstand at I ≈Reell & D≈ Reell.

Man kan vise at denne antagelsen er uavhengig av egenskapsteoriene E;1 – E;3. Fra en intuitiv synsvinkel virker den tvilsom. I Teorem 1 vil det ble innført en forutsetning som impliserer eksistensen av en slik koordinatisering, men vi vil senere se på hvordan denne forutsetningen kan svekkes. Det bør derfor understrekes at det her ikke på noen måte hevdes at denne antagelsen er riktig.

Tilslutt minnes det om at hvis b er en mengde med n-ære egenskaper så er Kon;(a,n) (b) konjunksjonen av egenskapene i mengden b og er x et n-ært attributt (n≥1) så er Neg;(a,n)(x) negasjonen av dette attributt.

Dermed er den tilstrekkelige begrepsmessige bakgrunn gitt som trengs for formuleringen av det første teoremet. Dette er:

Teorem 1 (E;1) Anta <π;1,π;2> er en koordinatisering av <I,D>. Definer for hvert n≥1 en funksjon f;n :Pt(Reel^n) –> A;n ved:

f;n(b) = (q;n);-1((dwêI)(Mg(z: (Eg)(gêReell^(n+1)Ωb &
z=(djên)((π;2);-1(g(j)) & g(n) = π;1(w))))

Da gjelder:

(a) f;n : Pt(Reell^n) –(1-1,på)–> A;n

(b) f;n er en isomomorfi mellom strukturene:
<Reell^n,SN;(n+1),c;(n+1)> og <A;n,Kon;(a,n),Neg(a,n)>

(c) Er wêI og bêPt(Reell^(n+1)) har man:
[q;n(f;n(b))]'w = Ekst;w(f;n(b)).

Vi føyer her til noen kommentarer som forhåpentligvis kan gjøre det lettere å forstå denne noe innviklede formuleringen.

Først minnes det om at q;n er den en-entydige avbildningen mellom A;n og Exp(Pt(D^n),I) som vi definerte i Del I, §7. Det minnes også om at uttrykket "(dxêQ)(f(x))" betegner den funksjonen hvis domene er mengden Q og som til ethvert element xêQ tilordner f(x). Videre bemerker vi at hvis fêReel^(n+1) er f en sekvens av lengde n+1. Dette innebærer at man har Dom(f)={0,...,n}=(n+1) og at de diverse f(k) for kê{0,...,n} er reelle tall. Benytter man seg av skrivemåten
[a;0,...,a;n] for å representerer sekvenser av lengde (n+1) har man at f=[a;0,...,a;n] for visse reelle tall a;0,..., a;n. Man har i så fall at

(djên)((π;2);-1(f(j)) = [π;2;-1(f(0)),...,π;2;-1(f(n-1)) = [π;2;-1(a;0),...,π;2;-1(a;0)].

Antar man videre at f(n)=π;1(w) vil man ha at a;n=π;1(w). Definisjonen av f;n i teoremet kunne derfor ha vært formulert litt mindre uigjennomsiktig slik:

(1) f;n(b) = ((q;n);-1)((dwêI)(Mg(<π;2;-1(a;0),...,π;2;-1(a;n-1)>:
<a;0,...,a;n-1,π;1(w)>êb))

Men siden vi strengt tatt ikke har gitt noen rigorøs definisjon av uttrykket "<a;0,...a;n>" foretrekker vi den uttrykksmåten som er benyttet i teoremet.

La oss også nevne at vi ikke vil gi noe bevis for Teorem 1. Dette er i det vesentlige så enkelt og rutinemessig at det kan overlates til leseren som en øvelsesoppgave.

Fra teoremet fremgår det at hvis <π;1,π;2> er en koordinatisering av <I,D> så finnes det en isomorfi mellom elementene i Pt(Reell^(n+1)), dvs. punktmengdene i det (n+1) -dimensjonale rom og egenskapene av grad n for alle n≥1. Nå er det imidlertid bare i det to- og tre-dimensjonale tilfellet, dvs. om n=1,2, at vi vel kan danne oss et klart og anskuelig bilde av Reell^n. Det en-dimensjonale tilfellet forsvinner her fordi det ikke svarer noen egenskaper i vår forstand til Reell. Det naturlige korrelatet her ville ha vært utsagn, men dette har blitt utelukket ved formuleringen av teoremet.

Anta nå at <π;1,π;2> er en fiksert koordinatisering av <I,D>. Vi vil først se på hva teoremet innebærer i forskjellige tilfelle om n=1. Fra definisjonen av f;n ser man, om man setter n=1, at resultatet blir:

(2) Ekst;w(f;1(b))= Mg([π;2;-1(x)] : [x,π;1(w)]êb)

om bêPt(Reell^2) og wêI. Mao. er ekstensjonen til f;1(a), den monadiske egenskapen somf;1 tilordner punktmengden b, i verdenen w lik:

(3) Mg([π;2;-1(x)]: [x,π;1(w)]êb)

Det gjør ikke noe om man her identifiserer en-leddete sekvenser av typen [a] med a og toleddete sekvenser [a,b] med ordnete par siden disse åpenbart er korrelert med hverandre. (2) kan derfor skrives slik:

(4) Mg(π;2;-1(x): <x,π;1(w)>êb)

Det kan nå være av interesse å se på hva slags egenskaper som svarer til b for konkrete angitte punktmengder b. I det følgende studeres tre eksempler:

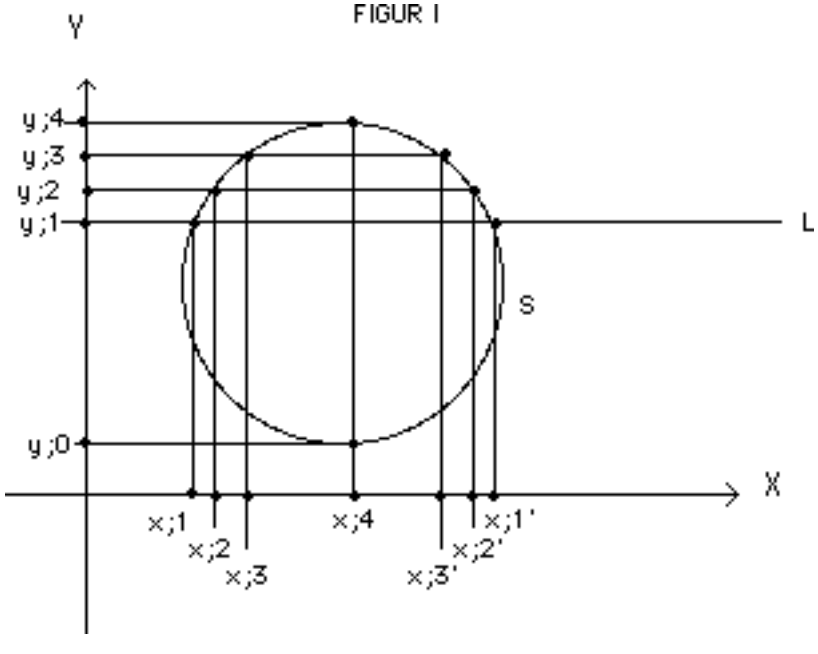
(I) Anta b={<1,1>}. Da inneholder b ett punkt i det to-dimensjonale rom. Sett w;0 = π;1;-1(1) og definer q ved q=π;2;-1(1). Ved hjelp av (4) må man da ha:

Ekst;w(f;1(b)) = Mg(π;2;-1(x): <x,π;1(w)>ê{<1,1>})
= Mg(π;2;-1(x): x=1 & π;1(w;0)=1)
= {π;2(1)} = {q}

Man ser altså at i verdenen w;0 er ekstensjonen til f;1(b) enhetsmengden som inneholder a. Anta nå at wê(I-{w;0}), mao. at w er en mulig verden som er distinkt fra w;0. Da har man, siden w;0=(π;1);-1(1) og π;1 er en korrelasjon at
(+) π;1(w)≠1. Hadde man da zêEkst;w(f;1(b)) for noe z måtte man i lys av (4) ha at det finnes x slik at z=π;2;-1(x) & <x,π;1(w)>ê{<1,1>}. Men i så fall har man π;1(w)=1 som strider mot (+). Det følger derfor at:
(Aw)(wê(I-{w;0})
–> Ekst;w(f;1(b)) =ø)
Fra dette fremgår det at f;1(b) om b={<1,1>} er det attributt hvis ekstensjon i verdenen w;0 er {q} og hvor ekstensjonen i alle mulige andre verdener er den tomme mengden.

(II) Vi betrakter FIGUR 1. På denne figuren er det inntegnet et rett-vinklet koordinat-system og i dette koordinatsystem en sirkel i første kvadrant. Vi lar alle de reelle tallpar <x,y> som relativt til det antydete koordinatsystem representerer punkter på omkretsen til sirkelen S eller punkter innenfor den inngå i mengden b;1. Man ser da at tallparene <x;1,y;1>, <x;1',y;1>,<x;2,y;2>, <x;2',y;2>, <x;3,y;3>,<x;3',y;3> og <x;4,y;4> representerer punkter og at disse tallparene inngår i b;1. Man ser også lett at alle de punktene som er felles for linjen L og sirkelskiven S representeres av tallparene i mengden:

FIGUR I



(5) d= Mg(<x,y;1>: x;1≤x & x≤x;1') Inkl b;1

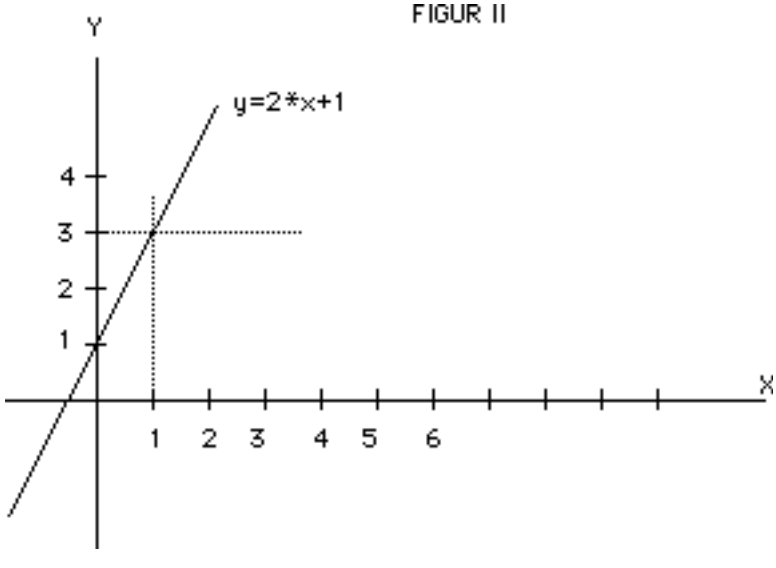
Vi vil nå studere nærmere den monadiske egenskapen som f;1 tilordner b;1. La oss først sette: (6) w;1=((π;1);-1)(y;1). Da har man i lys av (4) at:

Ekst;w(f;1(b;1)) = Mg(π;2;-1(x): <x,π;1(w;1)>êb;1)
= Mg(π;2;-1(x): <x,y;1>êb;1)
= Mg(π;2;-1(x): x;1≤x ≤x;1')= π;2;-1 ‘‘[x;1,x;1']

Mao. ser man at alle punktene på X-aksen som ligger mellom x;1 og x;1', inkludert disse punktene selv, representerer de mulige individene som utgjør ekstensjonen til f;1(b;1) i verdenen w;1. Setter man w;2=π;1;-1(y;2) ser man likeledes at ekstensjonen til f;1(b;1) i verdenen w;2 vil være π;2;-1 ‘‘[x;2,x,2']. Tilsvarende om vi definerer w;3 ved w;3=π;1;-1(y;3) og w;4 ved w;4=π;1;-1(y;4). Da har man at Ekst;(w;3)(f;1(b;1))= π;2;-1 ‘‘[x;3,x;3'] og at ekstensjonen til f;1(b;1) i verdenen w;4 har skrumpet inn til et punkt og er {π;2;-1(x;4)}. Tilslutt bemerkes det at hvis wêπ;1,-1 ‘‘(<y;4,+∞>U<-∞,y;0>) så er ekstensjonen til f;1(b;1) i verdenen w den tomme mengden.

(III) La oss gi et siste eksempel på en punktmengde i Reell^2 og det korrelerte attributt som svarer til denne punktmengden.

FIGUR II



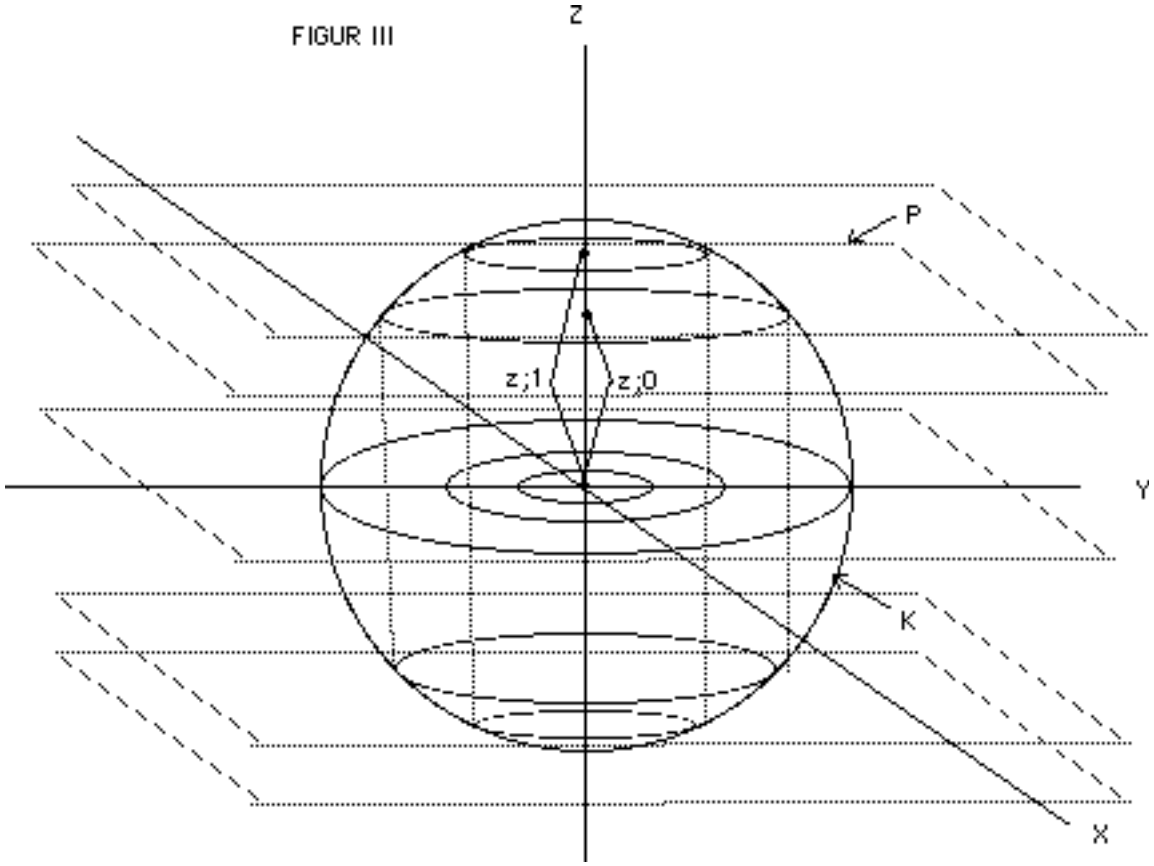
Vi setter b;2= Mg(<x,y>: y=2*x+1). Man ser da at ligningen y=2*x+1 representerer en rett linje som skjærer Y-aksen i punktet <0,1> og som har en vinkelkoeffesient på 2. Linjen er anskueliggjort i FIGUR 2. Det er ikke særlig vanskelig å se at det attributt som svarer til b;2, ie. f;1(b;2) har en ikke-tom ekstensjon i hver verden wêI. Er wêI og setter vi y=π;1(w) ser man at
<(y-1)*(1/2)>,π;1(w)>êb;2 og også at Mg(x: <x,π;1(w)>êb;2) = {(y-1)*(1/2)} for alle wêI. Mao. er f;1(b;2) et attributt hvis ekstensjon i hver verden er en enhetsmengde. Man ser også nokså lett at hvis w;1, w;2 er to distinkte verdener så har man at Ekst;(w;1)(f;1(b;2)) Ω Ekst;(w;2)(f;1(b;2)) = ø. Dette innebærer at attributtet f;1(b;2) har disjunkte ekstensjoner i distinkte verdener.

I noen grad har vi nå studert hva Teorem 1 impliserer om <π;1,π;2> er en koordinatisering av <I,D> og n=1. La oss nå se på hva man kan slutte om <π;1,π;2> er en koordinatisering og n=2. Da ser man at f;2 er en isomorfi mellom Pt(Reell^3) og A;2, dvs. klassen av de binære attributtene. Videre har man i dette tilfellet at:

Ekst;w(f;2(b)) = Mg(<π;2;-1(x),π;2;-1(y)>: <x,y,π;1(w)>êb)

De diverse elementene i Pt(Reell^3) representerer punktmengder i det tredimensjonale evklidske rom. La oss se litt på det attributt som svarer til b;3 Inkl Reell^3 der b;3 er

mengden av alle de <x,y,z>-tripler som representerer punkter som enten ligger på kuleflaten eller innenfor denne til den kulen som er avbildet på den følgende figur:



På figuren er det antydet et plan P som er parallelt med XY-planet og som ligger i en avstand z;0 fra dette plan. Vi tenker oss nå at Z-aksen representerer de logisk mulige verdenene og at punktene i XY-planet representerer klassen av alle par av mulige individer. Planet P skjærer gjennom kulen K og selve snittet utgjøres av en sirkelskive. De punkter i XY-planet som svarer til punktene på denne sirkelskiven vil da representere de parene av mulige individer som inngår i ekstensjonen til f;2(b;3) i den verdenen som svarer til z;0, dvs. π;1;-1(z;0). Tenker man seg at punktet z;0 flyttes oppover eller nedover Z-aksen og at planet P følger med vil den sirkelskiven som utgjør snittet mellom P og K bli enten noe mindre eller noe større. Dette innebærer da at ekstensjonen til attributtet representert ved b;3 blir henholdsvis mindre og mer omfattende ettersom vi betrakter de mulige verdenene som svarer til punktene litt over z;0 og litt under z;0.

§2. Intuitivt virker det ikke spesielt plausibelt å påstå at det finnes noen koordinatisering av <I,D>. Det virker mer rimelig å tenke seg at klassen av mulige verdener skulle ha en større mektighet enn kontinuumet. Det samme virker det rimelig å si om klassen avmulige individer. Dette innebærer at forutsetningen i Teorem 1, selvom den er konsistent med E;1 er temmelig sterk. Det er derfor naturlig å søke etter andre svakere forutsetninger. La oss først betrakte den følgende definisjon:

Definisjon 2 Med en koordinatisering i vid forstand av <I,D> forstås et ordnet par <∂;1,∂;2> der man har:
(i) ∂;1 : I –(på)–>Reell og (ii) ∂;2 : D –(på)–> Reell

Koordinatiseringer av <I,D> i denne vide forstand omfatter som man ser det vi tidligere har kalt koordinatiseringer. Forskjellen mellom Definisjon 1 og Definisjon 2 består i at man nå ikke lenger krever at koordinatiserings-funksjonene ∂;1 og ∂;2 skal være en-entydige.

Det bemerkes at hvis ∂;2 : D –(på)–>Reell har man at:

(∂;2(;-1))‘‘ {x} = Mg(y: yêD & ∂;2(y)=x)

Med andre ord er (∂;2(;-1))‘‘ {x} mengden av alle de objekter som ∂;2 avbilder på x. Man noterer også at de diverse ((∂;2);-1)‘‘{x} for xêReell er innbyrdesdisjunkte om ∂;2 : D –(på)–> Reell.

Anta nå at <∂;1,∂;2> er en koordinatisering av<I,D> i vid forstand. Vi lar da Æ^n være klassen av alle de fêExp(Pt(D^n),I) som oppfyller de følgende to krav:

(i) Er xêReell og har man w;1,w;2ê((∂;1);-1)‘‘{x} så er f(w;1)=f(w;2)

(ii) Er xêReell og wêI finnes det en mengde a Inkl Reell hvor man har:

f(w)=UN(Mg((∂;2);-1)‘‘{x}: xêa)

De egenskapene som svarer til funksjonene i klassen Æ^n, ie (q;n);-1 ‘‘(Æ^n) betegner vi med eÆ^n og kaller denne mengden mengden av geometriserbare egenskaper relativt til <∂;1,∂;2>. Etter disse forberedelsene kan vi nå formulere den følgende sats:

Teorem 2 (E;1) Anta <∂;2,∂;2> er en koordinatisering av <I,D> i vid forstand. La eÆ^n være mengden av geometriserbare egenskaper relativt til <∂;1,∂;2> og anta n≥1. Definer f;n for bêPt(Reell^(n+1)) ved:

f;n(b) = ((q;n);-1)((dwêI)(Mg(z: (Eg)(gêReell^(n+1)Ωb &
g(n)=∂;1(w) & zêX/jên/((∂;2);-1)‘‘{g(j)}))

Da gjelder:

(a) f;n :Pt(Reell^(n+1) –(1-1-,på)–>eÆ^n

(b) f;n er en isomorfi mellom strukturene
<Reell^n,SN;(n+1),c;(n+1)> og <A;n,Kon;(a,n),Neg(a,n)>

Som ved Teorem 1 overlater vi beviset for denne satsen til leseren som en øvelsesoppgave. Vi bemerker også at hvis eÆ^n (n≥1) er klassen av geometriserbare egenskaper relativt til koordinatiseringen <∂;1,∂;2> så er eÆ^n lukket under operasjonene Kon;(a,n) og Neg(a,n). Også denne påstanden kan verifiseres med utgangspunkt i de definisjonene vi nå har gitt.

Det er et iøynefallende slektskap mellom Teorem 1 og Teorem 2. Imidlertid er Teorem 2 tilsynelatende sterkere enn Teorem 1. For anta <π;1,π;2> er en koordinatisering i den første betydningen av <I,D>. Da er π;1 og π;2 en-entydige og på Reell. Man ser da at <π;1,π;2> trivielt også er en koordinatisering av <I,D> i vid forstand. Videre iaktar man under disse omstendigheter at for alle xêReell inneholder π;2;-1‘‘{x} nøyaktig ett element. Man har:

π;2;-1‘‘{x}={π;2;-1(x)}

Derfor faller den f;n som er definert i Teorem 1 sammen med den f;n som er definert i Teorem 2. Videre følger at Æ^n=Exp(Pt(D^n),I) siden π;1: I –(1-1,på)–> Reell. Det følger at eÆ^n = A;n. Men fra disse forhold og Teorem 2 utledes lett konklusjonen i Teorem 1. Dette viser at Teorem 1 følger fra Teorem 2 og at man derfor kan oppfatte Teorem 2 som en generalisering av Teorem 1.

La oss avslutningsvis kommentere enkelte forhold i forbindelse med Teorem 1 og Teorem 2 som kan være av interesse.

For det første kan det bemerkes at eksempler av typen I - III, som ble betrak-tet i forbindelse med Teorem 1, også kan studeres i forbindelse med Teorem 2.

For det andre nevnes det at teoremene som har blitt nevnt etablerer en en viss isomorfi mellom punktmengder og attributter, gitt en koordinatisering av <I,D>. Det vil derfor til bestemte geometriske objekter, f. eks. kuler, prismer, ellipsoider, og overflater av forskjellig art, svare spesielle attributter relativt til en slik koordinatisering. Siden størrelser av den førstnevnte type har en viss tydelighet og anskuelighet kan dette tjene til å anskueliggjøre attributtbegrepet. Dessuten har vi også påpekt visse strukturelle analogier som består mellom disse to, tilsynelatende helt disparate, objektsfærer.

Tilslutt bemerkes det at om e er en vanlig empirisk egenskap, f.eks. egenskapen å være en rød gjenstand, og man antar at I»Reell og D » Reell, behøver det ikke finnes noen koordinatisering <∂;1,∂;2> av <I,D> som er slik at e er med i klassen av de geometriserbare egenskapene relativt til <∂;1,∂;2>.

APPENDIX III

Appendix III

§0 I dette tillegget vil det bli gitt definisjoner av en rekke viktige begreper som har med intepreterte første-ordens språk å gjøre. Tillegget inneholder intet vesentlig nytt. Hovedhensikten er bare å fiksere innholdet til en del begreper slik at lesere som leser de av våre arbeider hvor disse begreper blir benyttet ikke er i tvil om hva som ligger i dem. I det følgende vil det bli definert hva som menes med et intepretert første-ordens språk, hva som menes med at en formel F er sann i et intepretert første-ordens språk relativt til en verditilordning v og en mulig verden w og hva som menes med en verditilordning for et intepretert første-ordens språk. Videre vil det bli forklart hva som menes med det utsagnet som uttrykkes av en lukket formel i et intepretert første-ordens språk og endelig hva som menes med den egenskapen som uttrykkes av en åpen setning F i et slikt språk. Disse begrepene vil bli definert innefor rammen av egenskapsteorien E;3.

§1 Vi starter med å gi en definisjon av konstruksjonen "x er et intepretert første-ordens språk":

Definisjon 1 Med et intepretert første-ordens språk forstås et trippel <L,f,D> som oppfyller de følgende krav: (i) L er et første-ordens språk hvor de ikke-logiske symbolene utelukkende er predikater. (ii) D er en ikke-tom mengde.
(iii) f er en funksjon hvor domenet er mengden av alle de predikater som inngår i L og hvor det følgende gjelder: (a) Er P et ikke-logisk n-ært predikat i L ($n \geq 1$) så er f(P) en n-ær egenskap og (Aw)(wêI –> Ekst;w(f(P)) Inkl D^n). (b) Er P identitetspredikatet i L så er f(P) den egenskapen hvis ekstensjonsfunksjon er Mg(<w,Rest(Id,D)>: wêI) der Id betegner identitetsrelasjonen ie. Mg(<x,y>: x=y).

Denne definisjonen kan formaliseres fullstendig innenfor rammen av E;3 siden uttrykket "første-ordens språk" kan gis en rigorøs definisjon i rent mengdeteoretiske termer på vanlig måte. Merk at vi begrenser oss slik at konstanter og funksjonssymboler ikke inngår i de språk vi arbeider med her. Det er imidlertid ikke spesielt vanskelig å endre våre definisjoner slik at man også kan ha slike uttrykk i språkene. Dette vil imidlertid ikke bli gjort her.

Definisjon 2 Med en verditilordning over et intepretert første-ordens språk <L,f,D> forstås en funksjon v som tilordner variabeltegnene i L elementer i mengden D.

Mao. er <L,f,D> et intepretert første-ordens språk og betegner man klassen av variabeltegn i L med Var(L), så er en verditilordning over <L,f,D> en funksjon v der man har v: Var(L) –>D.

§2. Vi sier at F er en formel i et intepretert første-ordens språk <L,f,D> hvis og bare hvis F er en formel i den første komponenten i språket, ie. hvis og bare hvis F er en formel i L.

Definisjon 3 Vi definerer hva som menes med at en formel F er sann i det intepreterte første-ordens språk <L,f,D> relativt til verditilordningen v og verdenen w, i symboler "<L,f,D> Tr;<v,w>(F)", ved den følgende induktive definisjon på lengden av formler:

(a) Er F=π(x;1,...,x;n) der π er et n-ært predikat i L setter man:
<L,f,D> Tr;<v,w>(F) <–> <v(x;1),...,v(x;n)>êEkst;w(f(π))
(b) Er F= (G;1 –> G;2) der G;1,G;2 er formler i L setter man:
<L,f,D> Tr;<v,w>(F) <–>
(<L,f,D> Tr;<v,w>(G;1) –> <L,f,D> Tr;<v,w>(G;2))
(c) Er F= (¬G;1) der G;1 er en formel i L setter man:
<L,f,D> Tr;<v,w>(F) <–> ¬(<L,f,D> Tr;<v,w>(G;1))
(d) Er F=(Ax)G der G er en formel i L og x et variabeltegn i L setter man:
<L,f,D> Tr;<v,w>(F) <–> (Aa)(aêD –>
<L,f,D> Tr;<v(x/a),w>(G;1)

Dette avslutter definisjonen. Det bemerkes i forbindelse med punkt (d) at dersom v er en verditilordning for <L,f,D> betegner v(x/a), om x er et variabeltegn i L, den verditilordningen som er nøyaktig som v bortsett fra at den til x tilordner a. Uttrykket "v(x/a)" kan formelt defineres slik:

v(x/a) = (v– {<x,v()>})U{<x,a>}

§3 Det gjenstår å definere hva som menes med det utsagnet som uttrykkes av en lukket formel F i et intepretert første-ordens språk <L,f,D>. Dette er det utsagnet som er sant i alle de mulige verdener w der man har <L,f,D> Tr;<v,w>(F) uansett hvilken verditilordning v det er man betrakter. Bruker vi uttrykket [F];*L* som forkortelse for det lengere uttrykket "Det utsagnet som uttrykkes av den lukkede formelen F i det intepreterte første-ordens språket *L* " og bruker man dessuten "VO(v,*L*) som forkortelse for "v er en verditilordning over *L* " kan denne definisjonen formaliseres slik:

Definisjon 4 La *L* =<L,f,D>. Da setter vi:
[F];*L* = μ;-1(Mg(w: wêI & (Av)(VO(v,*L*) –> *L* Tr;<v,w>(F))))

Anta tilslutt at F er en åpen setning i et intepretert første-ordens språk <L,f,D>. Anta x;1,...,x;n er distinkte variabeltegn og nøyaktig dem som forekommer fri i formelen F. (n≥1) Da er den egenskapen som uttrykkes av F i <L,f,D> definert som den egenskapen hvis ekstensjonsfunkjon g er definert på den følgende måte:

g(w) = Mg(<a;1,...,a;n>: a;1,...,a;nêD &
<L,f,D> Tr;<v(x;1,...,x;n/a;1,...,a;n),w>(F))

om wêI. Mao. er ekstensjonen til den egenskapen som uttrykkes av F i <L,f,D> i en mulig verden w mengden av alle de n-tupler <a;1,...,a;n> der man har :
<L,f,D> Tr;<v(x;1,...,x;n/a;1,...,a;n),w>(F)
Merk tilslutt at om v er en verditilordning og x;1,...,x;n en sekvens av n distinkte variabeltegn så er v(x;1,...,x;n/a;1,...,a;n) den verditilordningen som er nøyaktig som v bortsett fra at den ved variabeltegnene x;1,...,x;n tilordner disse henholdsvis entitetene a;1,...,a;n.

Vi har dermed gitt de definisjonene vi innledningsvis lovet å gi. Tilslutt bemerkes det at man på basis av aksiomene og de definisjonene som er gitt ovenfor er mulig å utvikle en generell teori om intepreterte første-ordens språk. Her skal det imidlertid ikke angis noen satser og bevis i denne teori, siden formålet bare var å fiksere innholdet til de begrepene som har blitt nevnt så langt.

****

Referanser

Referanser

Carnap [1], Carnap, Rudolf, *Meaning and Necessity* , The University of Chicago Press, Chicago & London, 1956
Cresswell [1], Cresswell,M.J., *Logics and Language* , Methuen &Co. Ltd., 1973
Hughes & Cresswell [1], Hughes and Cresswell, *An Introduction to Modal Logic*, Methuen & Co. Ltd., 1968
Kripke [1], Kripke, Saul A., "Semantical analyis of modal logic I. Normal modal propositional calculi.", *Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen der Mathematik.,* Bd.9, side 67 - 96, 1963
Hintikka [1], Hintikka, J., *Models for modalities. Selected essays*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht Holland, 1969
Kripke [1], Kripke, Saul, *Naming and necessity*, Harvard University Press, 1972, 1980
Lemmon [1], Lemmon, E. J., "A theory of attributes based on modal logic", Acta Philosophica Fennica., Modal and many-valued logics, side 95 - 122, 1963
Popper [1], Popper, Karl R., *Objective Knowledge. An Evolutionary approach* , Oxfaord,Clarendon Press, 1972
Rognes [1], Rognes, Morten, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [2], Rognes, Morten, *En teori om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [3], Rognes, Morten, *Egenskaper. Et sammendrag av to mulige teorier*, Makinskrevet manuskript, 1985
Rognes [4], Rognes, Morten, *Et sammendrag av en teori om egenskaper og presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [5], Rognes, Morten, *ZFC og eksistensen av urindivider*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [6], Rognes, Morten, *Egenskaper. Del II, Bevis for teoremer.*, Makinskrevet manuskript, 1987
Scott [1], Scott, Dana, "Advice on modal logic.", Philosphical Problems in Logic. (Ed. K. Lambert), Dordrecht Reidel, 1970, side 143 - 173.

*